שיעור 2

כלל השרשרת

תהי $y=f(x)$ פונקציה גזירה בנקודה $x=x_0$, ותהי $z=g(y)$ פונקציה גזירה בנקודה $y=y_0$. אזי הפונקציה המורכבת $z=g(f(x))$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים השוויון

$z'_x=\left[g\left(f\left(x_0\right)\right)\right]'=g'(y_0)\cdot f'(x_0)$.

דוגמא

נגזור את הפונקציה $h(x)=\sin\left(x^2\right)$.

נסמן $y=f(x)=x^2$, $z=g(y)=\sin y$ נשים לב ש $h(x)=g\left(f(x)\right)$.

$h'(x)=g'(y)\cdot f'(x)=\cos y\cdot 2x=\cos x^2\cdot 2x$.

כללי גזירה

יהיו $f(x),g(x)$ פונקציות גזירות בנקודה x, ויהי c מספר קבוע. אזי

א. $\left(cf(x)\right)'=cf'(x)$.

ב. $\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$.

ג. $\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

ד. אם $g(x)\neq 0$ אזי $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

לתת בשיעור דוגמאות לנגזרות

נגזרת של פונקציה מהצורה $y=f(x)^{g(x)}$ כאשר $f(x)>0$

אם $y=f(x)^{g(x)}$ אז $\ln y=\ln f(x)^{g(x)}\Leftarrow \ln y=g(x)\ln f(x)$

נגזור את שני האגפים ונקבל

$\dfrac{y'}{y}=\left(g(x)\ln f(x)\right)'$.

דוגמא

נחשב את הנגזרת של $y=x^{\sin x}$ כאשר $0<x$.

לפי החישוב הקודם נקבל ש $\dfrac{y'}{y}=\left(\sin x\ln x\right)'\Rightarrow y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

נגזרות חד צדדיות

הגדרה

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית מסוימת של הנקודה $x=x_0$.

הגבול $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, אם הוא קיים, נקרא הימנית של $f(x)$ בנקודה x_0, היא מסומנת ע"י $f'_+(x_0)$. באופן דומה נגדיר נגזרת שמאלית בנקודה x_0 ונסמנה ע"י $f'_-(x_0)$.

תרגיל 1

חשב את הנגזרות החד-צדדיות של הפונקציה $f(x)=|x|$ בנקודה $x=0$.

פתרון

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-0}{h}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-0}{h}=-1$$

תרגיל 2

חשב את הנגזרות החד-צדדיות של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2-2 & x\ge 1\\ 3x-4 & x<1\end{cases}$ בנקודה $x=1$.

פתרון

על פי הגדרת הפונקציה, אם $h>0$ אזי $f(1+h)=(1+h)^2-2$, ואם $h<0$ אזי $f(1+h)=3(1+h)-4$.

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2-2-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1+2h+h^2-2+1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h+h^2}{h}=2$$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3(1+h)-4-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3+3h-4+1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3h}{h}=3 .$$

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה x_0. אזי $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 אם ורק אם קיימות הנגזרות החד-צדדיות בנקודה x_0 והן שוות.

אם קיימת הנגזרת או אם קיימות הנגזרות החד-צדדיות והן שוות אז יתקיים השוויון $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

דוגמא

הפונקציות בתרגילים 1,2 לא גזירות.

תרגיל 3

הוכח כי הפונקציה $f(x)=\begin{cases}6x+9 & x\ge 2\\ 15+\frac{3x^2}{2} & x<2\end{cases}$ גזירה בנקודה $x=2$.

פתרון

תחילה נשים לב שהפונקציה רציפה בנקודה $x=2$ מכיוון ש $\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=21$.

נשים לב ש $f'_+(2)=f'_-(2)=6$. לכן מן המשפט הקודם הפונקציה גזירה בנקודה $x=2$ ומתקיים $f'(2)=6$.

משפט ערך הביניים

תהא f רציפה ב $[a,b]$, ונניח ש $f(a)<0, f(b)>0$ (או להפך) אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f(c)=0$.

תרגיל

תהיינה $f,g:[a,b]\to[a,b]$ פונקציות רציפות. הוכח כי אם g היא על, אז קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש $f(c)=g(c)$.

פתרון

נגדיר את הפונקציה $h(x)=g(x)-f(x)$. נתון כי f,g הן פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ ולכן גם h רציפה בקטע $[a,b]$. (הפרש של פונקציות רציפות).

נתון כי g היא על $[a,b]$ ולכן קיים $x_a\in[a,b]$ כך ש $g(x_a)=a$.

נתון כי g היא על $[a,b]$ ולכן קיים $x_b\in[a,b]$ כך ש $g(x_b)=b$.

נניח ב.ה.ג.כ. ש $x_a<x_b$. מכאן ש

$h(x_a)=g(x_a)-f(x_a)=a-f(x_a)\le 0$.

$h(x_b)=g(x_b)-f(x_b)=b-f(x_b)\ge 0$.

h פונקציה רציפה עבור $[a,b]$ ובפרט רציפה עבור $[x_a,x_b]$ ולכן על פי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $x_a\le c\le x_b$ כך ש $h(c)=0$.

משפט פרמה

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע הפתוח (a,b) וגזירה בנקודה פנימית x_0. אם $f(x)$ מקבלת בנקודה x_0 את ערכה הגדול ביותר או את ערכה הקטן ביותר אזי $f'(x_0)=0$.

הערה

שימו לב לחשיבות הדרישה ש $f(x)$ תהייה גזירה.

הפונקציה $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$ מקבלת ערך מינימאלי כאשר $x=1$.

הנגזרת לא קיימת במקרה זה.

משפט רול

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע הסגור $[a,b]$ המקיימת את התנאים הבאים:

א. $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$.

ב. $f(x)$ גזירה בקטע הפתוח (a,b).

ג. $f(a)=f(b)$.

אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f'(c)=0$.

תרגיל

כמה פתרונות יש למשוואה $x^5-5x^4+5x^3+10=0$.

פתרון

נתבונן בפונקציה $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+10$.

$f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2\left(x^2-4x+3\right)=5x^2(x-3)(x-1)$.

הנקודות שהנגזרת מתאפסת הם $0,1,3$.

ממשפט רול נקבל שבכל אחד מהקטעים $(\infty,0],[0,1],[1,3],[3,\infty)$ יש לכל היותר פתרון אחד.

על פי משפט ערך הביניים נוכל לדעת האם יש פתרון בכל אחד מהקטעים הנ"ל.

נתבונן בקטע $(-\infty,0]$

$f(0)=10,\ f(-10)<0$ ולכן יש פתרון אחד בקטע $(-\infty,0]$.

נתבונן בקטע $[0,1]$

$f(0)=1,\ f(1)=11$ ולכן אין פתרון בקטע $[0,1]$.

נתבונן בקטע $[1,3]$

$f(1)=11,\ f(3)=-17$ ולכן יש פתרון אחד בקטע $[1,3]$.

נתבונן בקטע $[3,\infty)$

$f(3)=-17,\ f(10)>0$ ולכן יש פתרון אחד בקטע $[3,\infty)$.

סה"כ נקבל שלושה פתרונות למשוואה.

<u>תרגיל (בתרגיל בית)</u>

כמה פתרונות יש למשוואה $x\sin x+\cos x=x^2$ בקטע $[0,\infty)$.

<u>פתרון</u>

יש לבדוק כמה פתרונות יש למשוואה $x\sin x+\cos x-x^2=0$ בקטע $[0,\infty)$.

נתבונן בפונקציה $f(x)=x\sin x+\cos x-x^2$.

$f'(x)=x\sin x+\cos x-x^2=\sin x+x\cos x-\sin x-2x=x\cos x-2x=x(\cos x-2)$.

מכיוון שפונקצית הנגזרת מתאפסת רק בנקודה $x=0$ נקבל ממשפט רול שיש לכל היותר פתרון אחד למשוואה $f(x)=x\sin x+\cos x-x^2$ בקטע $[0,\infty)$.

$f(0)=1$, $f(10)=10\cdot\sin 10+\cos 10-100<-81$ וזאת מכיוון ש $|\sin x|<1, |\cos x|<1$.

לפי משפט ערך הביניים נקבל שיש לפחות פתרון אחד בקטע $[0,10]$ ואז יש לפחות פתרון אחד בקטע $[0,\infty)$.

סה"כ קיבלנו שיש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד בקטע $[0,\infty)$ ז"א יש בדיוק פתרון אחד בקטע $[0,\infty)$.

<u>משפט הערך הממוצע של לגראנז</u>

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b).

אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

<u>תרגיל</u>

מצא נקודת/נקודות לגרנז' של הפונקציה $f(x)=x^3-x^2-14x+24$ בקטע $[-5,5]$.

<u>פתרון</u>

$f'(x)=3x^2-2x-14$ יש למצוא נקודה c כך ש $f'(c)=\dfrac{f(5)-f(-5)}{5-(-5)}=\dfrac{54-(-56)}{10}=11$

ז"א $3x^2-2x-14=11\Rightarrow 3x^2-2x-25=0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{304}}{6}$

וקיבלנו את נקודות לגראנז'.

<u>תרגיל</u>

מצא נקודת לגרנז' c של הפונקציה $f(x)=x^4$ ב $[1,3]$.

<u>פתרון</u>

$f'(x)=4x^3$ יש למצוא נקודה c כך ש $f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{81-1}{2}=40$.

$4x^3=40 \Leftarrow x^3=10 \Leftarrow x=\sqrt[3]{10}$.

<u>פונקציה מונוטונית</u>

<u>הגדרה</u>

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית עולה בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים $x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$.

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית יורדת בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים $x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$.

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית עולה ממש בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים
$x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)< f(x_2)$.

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית יורדת ממש בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים
$x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)> f(x_2)$.

<u>דוגמא</u>

הפונקציה $f(x)=\ln x$ עולה ממש בתחום $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$.

נראה זאת לפי ההגדרה: יהיו $x_1,x_2\in D$ כך ש $x_1<x_2$ כעת $f(x_2)-f(x_1)=\ln\frac{x_2}{x_1}$ מכיוון ש
$0<x_1<x_2$ נקבל ש $\frac{x_2}{x_1}>1$ ולכן $f(x_2)-f(x_1)=\ln\frac{x_2}{x_1}>0$ ואז הפונקציה $f(x)$ עולה ממש.

<u>תרגיל</u>

נתון שהפונקציות f,g עולות ממש ב $\mathbb{R}$ הוכח שהפונקציה $f\circ g$ גם עולה ממש.

<u>פתרון</u>

יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ כך ש $x_1<x_2$. $f\circ g(x_2)-f\circ g(x_1)=f(g(x_2))-f(g(x_1))$.
מכיוון ש g פונקציה עולה ממש ומכיוון ש $x_1<x_2$ נקבל ש $y_1:=g(x_1)<y_2:=g(x_2)$ ואז
$y_1,y_2\in\mathbb{R}$ כך ש $y_1<y_2$ ומכיוון ש f פונקציה עולה ממש נקבל ש
$f\circ g(x_2)-f\circ g(x_1)=f(g(x_2))-f(g(x_1))=f(y_2)-f(y_1)>0$ כדרוש.