<u>תרגול 5</u>

<u>אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון</u>

<u>הגדרה</u>

אינטגרל מסוים ייקרא לא אמיתי מסוג ראשון אם הוא בעל גבול אינטגרציה (תחתון או עליון) אינסופי.

<u>תכונות חשובות</u>

א. לכל נקודה c מתקיים: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$.

ב. מספיק שאחד מהאינטגרל באגף ימין יתבדר כדי שהאינטגרל באגף שמאל יתבדר.

ג. $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$.

<u>הערה</u>

אם הגבול $\lim\limits_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$ קיים וסופי נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס, אחרת נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ מתבדר.

<u>תרגיל</u>

הוכח ש $\int_{a}^{\infty}\frac{dx}{x^p},(a>0)$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $p>1$.

<u>פתרון</u>

עבור $p>1$.

$$\int_{a}^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-p}{x^{p-1}\cdot(1-p)}\right]_a^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-p}{b^{p-1}\cdot(1-p)}+\frac{p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}\right]$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{-p}{b^{p-1}\cdot(1-p)}\right]+\frac{p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}$$

מכיוון ש $p>1$ נקבל ש $\lim\limits_{b\to\infty}\left[\frac{-p}{b^{p-1}\cdot(1-p)}\right]=0$ ואז $\int_{a}^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}$ ולכן הגבול קיים וסופי והאינטגרל הלא אמיתי מתכנס.

עבור $p=1$ נקבל

$$\int_{a}^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_a^b = \lim_{b\to\infty}\left[\ln b-\ln a\right] = \lim_{b\to\infty}\ln b-\ln a.$$

מכיוון שהגבול $\lim\limits_{b\to\infty}\ln b$ לא סופי נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי מתבדר.

עבור $p<1$.

$$\int_{a}^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-p}{x^{p-1}\cdot(1-p)}\right]_a^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-p}{b^{p-1}\cdot(1-p)}+\frac{p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-p}{b^{p-1}\cdot(1-p)}\right]+\frac{p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}$$

מכיוון ש $p<1$ נקבל ש $\lim\limits_{b\to\infty}\left[\frac{-p}{b^{p-1}\cdot(1-p)}\right]=\infty$ ואז $\int_{a}^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{p}{a^{p-1}\cdot(1-p)}$ ולכן הגבול אינסופי והאינטגרל הלא אמיתי מתבדר.

<u>תרגיל</u>

לאילו ערכים של הפרמטר p מתכנס האינטגרל $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^{p}x}$.

<u>פתרון</u>

נשתמש בשיטת ההצבה

נציב $t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$.

$$\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^{p}x}=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{dt}{t^{p}}$$

ומתרגיל קודם האינטגרל מתכנס אם ורק אם $1<p$.

<u>תרגיל</u>

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_{0}^{\infty}e^{-2x}dx$ ב. $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^{2}}$ ג. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}$.

<u>פתרון</u>

א. $\int_{0}^{\infty}e^{-2x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}e^{-2x}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{0}^{b}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2b}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

ב. $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^{2}}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{-1}\frac{dx}{x^{2}}=\lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{a}^{-1}=1-\lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{a}\right)=1$.

ג. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}+\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{1+x^{2}}$.

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}=\lim_{a\to\infty}\int_{1}^{a}\frac{dx}{1+x^{2}}=\lim_{a\to\infty}\left[\arctan x\right]_{1}^{a}=\lim_{a\to\infty}\arctan a-\arctan 1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{1+x^{2}}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{1}\frac{dx}{1+x^{2}}=\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan x\right]_{a}^{1}=\arctan 1-\lim_{a\to-\infty}\arctan a=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}+\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{1+x^{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\pi.$$

<u>תרגיל</u>

פתור את האינטנגרל $\int_{\frac{1}{4}}^{\infty}\frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}$.

<u>פתרון</u>

נמצא תחיל את הפונקציה הקדומה של $\frac{1}{(4x+1)\sqrt{x}}$.

$$\int\frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}=?.$$

נשתמש בשיטת ההצבה: $t=\sqrt{x}\Rightarrow dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

$$\int\frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}=\int\frac{2dt}{4t^{2}+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^{2}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\cdot 2\arctan(2t)=\arctan 2\sqrt{x}$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\infty}\frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}=\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{1}{4}}^{b}\frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}=\lim_{b\to\infty}\left[\arctan 2\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{4}}^{b}=\lim_{b\to\infty}\arctan 2\sqrt{b}-\arctan 2\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

<u>מבחני השוואה להתכנסות אינטגרלים</u>

<u>מבחן ההשוואה</u>

יהיו $f(x)$ ו $g(x)$ שתי פונקציות אי שליליות בקטע $[a,\infty)$, ואינטגרביליות בקטע $[a,b]$ לכל $a<b$.

נניח שקיים מספר ממשי b_0 כך שלכל $x\ge b_0$ מתקיים $f(x)\le g(x)$. אזי

א. אם האינטנגרל $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס.

ב. אם האינטגרל $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ מתבדר אז גם האינטגרל $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ מתבדר.

<u>תרגיל</u>

עבור אילו ערכים חיוביים של פרמטר p מתכנס האינטגרל $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^p+1}dx$.

<u>פתרון</u>

מכיוון שלכל p האינטגרל $\int_0^{1}\frac{1}{x^p+1}dx$ סופי מספיק לבחון את $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p+1}dx$.

ראינו מקודם שעבור $p>1$ האינטגרל $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$ מתכנס.

לכל $1<x$ מתקיים $\frac{1}{x^p+1}\le\frac{1}{x^p}$ ולכן עבור $p>1$ האינטגרל $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p+1}dx$ מתכנס.

עבור $0<p\le 1$, $1<x$ נקבל ש $1<x^p$ ובנוסף $\int_1^{\infty}\frac{1}{2x^p}dx$ מתבדר.

לכל $1<x$ מתקיים $\frac{1}{x^p+1}\ge\frac{1}{x^p+x^p}$ ולכן עבור $0<p\le 1$ האינטגרל $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p+1}dx$ מתבדר.

<u>תרגיל</u>

קבעו התכנסות/התבדרות של $\int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{x}dx$.

<u>פתרון</u>

לכל $1<x$ נקבל ש $\arctan x>\frac{\pi}{4}$ ולכן $\frac{\arctan x}{x}>\frac{\pi}{4x}$. מכיוון ש $\int_1^{\infty}\frac{\pi}{4x}dx$ מתבדר נקבל ממבחן ההשוואה הראשון ש $\int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{x}dx$ מתבדר.

<u>מבחן המנה</u>

יהיו $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות אי שליליות בקטע $[a,\infty)$, ונניח שקיים הגבול $L=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ אזי

א. אם $0<L<\infty$ אז שני האינטגרלים $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ו $\int_a^{\infty} g(x)dx$ מתכנסים ביחד או מתבדרים ביחד.

ב. אם $L=0$ ואם האינטגרל $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

ג. אם $L=\infty$ ואם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס.

<u>תרגיל</u>

בדוק התכנסות/התבדרות dx $\int_1^\infty \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$.

<u>פתרון</u>

הפונקציה $f(x)=\frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$ פונקציה חיובית לכל x בקטע $[1,\infty)$ ולכן נשתמש במבחן המנה.

נסמן $g(x)=\frac{1}{x}$ ונשים לב ש $\int_1^\infty g(x)dx$ מתבדר.

נשתמש במבחן ההשוואה השני.

$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}{x}=2$ ולכן גם dx $\int_1^\infty \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$ מתבדר.

<u>מבחן דריכלה</u>

תהיינה f,g פונקציות רציפות בקטע $[a,\infty)$ כך שמתקיים:

1. f פונקציה מונוטונית יורדת ו $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
2. פונקצית הנגזרת f' רציפה בקטע.
3. הפונקציה $G(x)=\int_a^x g(t)dt$ חסומה.

אזי $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס.

<u>הערה</u>

מבחן דריכלה מתאים גם לפונקציות שמקבלות ערכים חיוביים ושליליים בשונה ממבחני ההשוואה הקודמים.

<u>תרגיל</u>

בדוק התכנסות של dx $\int_1^\infty \frac{x\sin x}{x^2+1}$.

<u>פתרון</u>

נשתמש במבחן דיריכלה.

נסמן ; $\boldsymbol{f(x)=\sin x}$ $\quad g(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ונבדוק את התנאים של מבחן דיריכלה.

לכל $\boldsymbol{x}$ מתקיים $\boldsymbol{\left|\int_0^x f(t)dt\right|=|1-\cos x|\le 2}$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$$

כדי להוכיח שפונקציה $\boldsymbol{g(x)}$ מונוטונית יורדת נחשב את הנגזרת $\boldsymbol{g'(x)}$

$$g'(x) = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$\boldsymbol{g'(x) < 0}$ לכל $x > 1$, לכן $\boldsymbol{g(x)}$ יורדת החל מ $x > 1$

התנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן האינטגרל מתכנס.

<u>הערה</u>

ראינו שאחת מתכונות האינטגרל $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right| dx$.

ממבחן ההשוואה נקבל שאם $\int_a^\infty \left|f(x)\right| dx$ מתכנס אז $\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right|$ מתכנס ולכן $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.