# תרגיל 3

1. קבעו אילו מהמטריקות הבאות שקולות על $\mathbb{Z}$?

   (א) $d_5$.

   (ב) $d_7$.

   (ג) מטריקה $0-1$ כלומר

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$$

   (ד) והמטריקה המושרית מהמטריקה הסטנדרטית על $\mathbb{R}$ (כלומר $d(x,y)=|x-y|$).

2. יהי $(X,d)$ מרחב מטרי. נגדיר $\rho : X\to\mathbb{R}$ לפי

$$\rho(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$$

   (א) הוכיחו כי $\rho$ היא מטריקה.

   (ב) הוכיחו כי $\rho$ ו $d$ שקולות.

   (ג) הסיקו שכל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.

3. כזכור, הוכחנו בתרגול שעל המרחב $l_1$ של הסדרות הממשיות $(x_i)$ כך ש $\sum|x_i|<\infty$, המטריקה $d_1$ ומטריקת הסופרימום אינן שקולות. כמו כן, הוכחתם בהרצאה שמטריקות הן שקולות אמ"ם הן מגדירות את אותן קבוצות פתוחות. זה מוביל אותנו לתרגיל הבא:
   מצאו קבוצה פתוחה ב$(l_1,d_1)$ שאינה פתוחה ב$(l_1,d_\infty)$.

4. א. יהי $X$ מרחב מטרי שלם, ו$A\subseteq X$ תת מרחב. הוכיחו שאם $A$ סגורה ב$X$, אז $A$ מרחב מטרי שלם.

   ב. הראו שאם $X$ אינו שלם, אז הטענה אינה בהכרח נכונה (כלומר, יתכן ש $A$ סגורה ב$X$, אבל $A$ לא מרחב שלם).

ג. יהי $X$ מרחב מטרי כלשהו, ו$A \subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם. הוכיחו ש$A$ סגורה ב$X$.

ד. יהי $X$ מרחב מטרי שלם, ו$f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו/הפריכו: $f[X]$ תת מרחב שלם של $\mathbb{R}$.

5. יהי $(X,d)$ מרחב מטרי. נגדיר את **הקוטר** של תת-קבוצה $A \subseteq X$ על ידי:

$$diam\,(A) = \sup\left\{d\,(x,y)\,|x,y \in A\right\}$$

הוכיחו שמרחב מטרי הוא שלם אם ורק אם לכל סדרה יורדת של קבוצות סגורות לא ריקות $X \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \cdots$ המקיימת $diam\,(F_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ מתקיים $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.
זהו הקריטריון של קנטור לשלמות.

6. נתבונן במרחב $C\,[0,1]$, מרחב כל הפונקציות הרציפות $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ עם מטריקת המקסימום.

(א) תהי $a \in [0,1]$. נגדיר פונקציה $F_a : C\,[0,1] \to \mathbb{R}$ על ידי: $F_a\,(f) = f\,(a)$. הוכיחו שזו פונקציה רציפה.

(ב) הוכיחו שהקבוצה $\left\{f \in C\,[0,1] : f\left(\frac{1}{3}\right) < 19\right\}$ פתוחה ב- $C\,[0,1]$.

7. יהי $(X,d)$ מ"מ ו$a \in X$. הוכיחו שהקבוצה הבאה:
$S[a,r] = \{x \in X : d(x,a) = r\}$ סגורה.