תזכורת:

אנחנו מסמנים את השורה ה־$i$ של מטריצה $A$ ב־ $R_i\left(A\right)$ ואת העמודה ה־$j$ של $A$ ב־$C_j\left(A\right)$. כאשר $A\in\mathbb{F}^{m\times n},B\in\mathbb{F}^{n\times k}$ המכפלה $AB$ מוגדרת כך:

$$\left(AB\right)_{ij}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lj}$$

המכפלה לא חילופית, כן קיבוצית, כן פילוג...מתקיים: $AB\in\mathbb{F}^{m\times k}$.

כפל שורה־שורה:

$$R_i\left(AB\right)=R_i\left(A\right)B$$

כפל עמודה־עמודה:

$$C_j\left(AB\right)=AC_j\left(B\right)$$

מטריצת היחידה $I_n$ (מסדר $n$ – יש לה $n$ שורות ו־ $n$ עמודות) זו מטריצה שבאלכסון שלה יש $1$ והשאר אפסים. כלומר:

$$\left(I\right)_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$$

מטריצת היחידה היא "נייטרלית לכפל" – לכל $A\in$

$\mathbb{F}^{m\times n}$ מתקיים:

$$I_mA = AI_n = A$$

<u>מטריצות הפיכות:</u>

האם לכל מטריצה $A$ יש הופכית? איך בכלל נגדיר הופכית של מטריצות?

אם כן, נאמר שמטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ היא הפיכה אם קיימות מטריצות $B, C$ כך שמתקיים: $AB = I_m$ וגם: $CA = I_n$. (נשים לב שהמטריצות $B, C$ הן מאותו גודל, $n \times m$).

*אם אנחנו יודעים שקיימת $B$ המקיימת: $AB = I$, אפשר לומר ש־$A$ הפיכה מימין; אם $CA = I$ אפשר לומר ש־$A$ הפיכה משמאל. בעצם, הגדרנו ש: $A$ הפיכה אם ורק אם $A$ הפיכה משמאל וגם הפיכה מימין. בנוסף אפשר לומר ש־$B$ היא הופכית מימין של $A$, המטריצה $C$ היא הופכית משמאל.

במצב כזה, $B = C$ (הוכחה בסיכומים), ולכן ההופכית

(אם קיימת) יחידה ואפשר לסמן אותה ב־$A^{-1}$.

אם $A$ הפיכה, אז גם ההופכית $A^{-1}$ הפיכה, וההופכית של ההופכית היא $A$, יעני: $A = \left(A^{-1}\right)^{-1}$ (כמו במספרים: $2 = \left(2^{-1}\right)^{-1}$).

כדי להראות שמטריצה $A$ היא הפיכה ו־$B$ היא ההופכית שלה (ואז: $B = A^{-1}$), אנחנו צריכים להראות שמתקיים: $AB = BA = I$.

למשל:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

<u>דוגמה נוספת:</u>

תהי $A$ מטריצה המקיימת: $(A + I)^2 = 0$. נראה ש־$A$ הפיכה ונמצא את ההופכית. אפשר לרשום:

$$AA+AI+IA+II = (A + I)(A + I) = (A + I)^2 = 0$$

כלומר:

$$A^2 + 2A + I = 0 \Longrightarrow I = -2A - A^2$$

לכן:

$$I = A(-2I - A) = (-2I - A)A$$

לכן, לפי ההגדרה, $A$ הפיכה וההופכית היא: $A^{-1}=-2I-A$.

**חשוב!**

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$

טענה: אם $A,B$ הפיכות והמכפלה $AB$ מוגדרת, אז $AB$ הפיכה ומתקיים: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. כדי להוכיח זאת, לפי ההגדרה עלינו להראות ש:

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB)=I$$

אם ב$A$ יש שורת אפסים, אז $A$ לא הפיכה; נניח בשלילה ש־$A$ כן הפיכה - קיימת $A^{-1}$ כך ש:

$$AA^{-1}=I$$

$R_i(A)=0$ ולכן גם:

$$0=R_i\left(AA^{-1}\right)=R_i(I)$$

וזו סתירה, כי ב־$I$ אין שורת אפסים...

באופן דומה, אם ב־$A$ יש עמודת אפסים אז $A$ לא

הפיכה.

<u>מטריצות פעולות־שורה אלמנטריות:</u>

המטרה היא לומר מתי מטריצה כן הפיכה, ובסופו של דבר גם לדעת איך למצוא את ההופכית. על הדרך, נקשר בין מטריצות הפיכות וכפל מטריצות לפעולת הדירוג.

נסמן פעולת שורה באות היוונית רו: $\rho$. למשל: $\rho : R_1 \to R_1 + 3R_2$.

נסמן ב־$\rho(A)$ את המטריצה המתקבלת מ־$A$ אחרי שביצענו על $A$ את $\rho$. למשל, עם אותה $\rho$ כמו בדוגמה שלנו:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

המטריצה $\rho(I)$ נקראת מטריצת הפעולה $\rho$. בדוגמה שלנו:

$$\rho(I) = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

עכשיו, נשים לב:

$$\rho(I)A=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&0\\5&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&3&1\\-2&1&0\\5&5&4\end{pmatrix}=\rho(A)$$

אם כן, אפשר להחליף את פעולות השורה (ואת תהליך הדירוג בכלל) בכפל במטריצות מתאימות.

<u>טענה:</u>

א. לכל פעולת שורה $\rho$ ולכל מטריצה $A$ מתקיים: $\rho(I)A=\rho(A)$.

ב. לכל פעולת שורה $\rho$, המטריצה $\rho(I)$ הפיכה.

אם $\rho$ פועלת רק על השורה ה־$i$, בכל שאר השורות לא השתנה דבר; כלומר, אם $i\neq j$ אז: $R_j(A)=R_j(\rho(A))$.

ספוילר לסעיף ב' - את הפעולה ההופכית ל־$\rho$ נסמן $\rho^{-1}$. למשל, אם $\rho:R_1\to R_1+3R_2$ אז: $\rho^{-1}:R_1\to R_1-3R_2$ מתקיים:

$$\rho(I)^{-1}=\rho^{-1}(I)$$

כלומר, המטריצה ההופכית של מטריצת הפעולה היא מטריצת הפעולה של הפעולה ההופכית.

למשל, בדוגמה שלנו:

$$\rho\left(I\right)=\rho\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

כמו כן, $\rho^{-1}:R_1\to R_1-3R_2$ ולכן:

$$\rho^{-1}\left(I\right)=\rho^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

כעת, מתקיים: $\rho\left(I\right)\rho^{-1}\left(I\right)=I$ וגם מצד שני, כלומר: $\rho^{-1}\left(I\right)=\rho\left(I\right)^{-1}$. אכן:

$$\rho\left(I\right)\rho^{-1}\left(I\right)=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

זה נכון תמיד:

$$\rho\left(I\right)\rho^{-1}\left(I\right)=\rho\left(\rho^{-1}\left(I\right)\right)=I$$

כי לכפול במטריצת הפעולה זה כמו לבצע את הפעולה; הפעולות $\rho,\rho^{-1}$ מבטלות אחת את השניה. באופן דומה:

$$\rho^{-1}\left(I\right)\rho\left(I\right)=\rho^{-1}\left(\rho\left(I\right)\right)=I$$

אם מטריצות $E_1, E_2, E_3$ הפיכות והמכפלה $E_1E_2E_3$ מוגדרת, אז המכפלה הפיכה ומתקיים:

$$(E_1E_2E_3)^{-1} = E_3^{-1}E_2^{-1}E_1^{-1}$$

אם יש יותר שורות מעמודות (למשל $4$ שורות ו־$3$ עמודות) – בצורה הקנונית תהיה שורת אפסים.

ראינו שבמטריצה הפיכה לא יכול להיות שיש יותר שורות מעמודות. עכשיו, אנחנו רוצים להראות שלא יכול להיות שבמטריצה הפיכה יש יותר עמודות משורות. אם ב־$A$ יש יותר עמודות משורות, במטריצה $A^{-1}$ יש יותר שורות מעמודות, וזה כבר הראנו שלא יכול להיות...

אם יש יותר עמודות משורות, אי־אפשר להסיק שבצורה הקנונית יש עמודת אפסים או משהו כזה, למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

אם הצורה הקנונית היא $I$, מכיוון שקיימת $P$ הפיכה כך ש: $CF\left(A\right)=PA$, אפשר לרשום: $I=PA$.
נכפול ב-$P^{-1}$ משמאל את שני האגפים:

$$P^{-1}I=P^{-1}PA$$

לכן:

$$P^{-1}=IA=A$$

אם $A$ ריבועית והפיכה מצד אחד: $AB=I$ או $BA=I$, אז בהכרח $A$ הפיכה משני הצדדים (כלומר, הפיכה) וההופכית שלה היא $B$.