פתרון תרגיל 10 בדידה להנדסה:

1. פונקציה חח"ע - אם התמונות שוות המקורות שווים.

(א) נגדיר $g : A \to A \times B$ ע"י: $g(a) = (a, b_1)$ כאשר $b_1 \in B$ איבר מסויים בקבוצה B. אנו יודעים שקיים איבר כזה מכיוון שהקבוצה אינה ריקה. אם $g(a_1) = g(a_2)$ כלומר $(a_1, b_1) = (a_2, b_1)$ אז $a_1 = a_2$ ולכן הפונקציה חח"ע.

(ב) **תמיד** יש פונקציה חח"ע מקבוצה לעצמה, פונקציית הזהות.

2. נבדוק האם התכונות מתקיימות בכל אחת מהפונקציות הנתונות:

(א) f לא חח"ע, כי $-1 \neq 1$ אך $f(1) = f(-1)$. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(n) = n$ ולכן לכל איבר בטווח $\mathbb{N}$ יש מקור ולכן f על.

(ב) f חח"ע, כי אם $f(y_1) = f(y_2)$ אז $y_1^3 = y_2^3$ ולכן $y_1 = y_2$. לכל איבר $y \in \mathbb{R}$, $\sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$ מקיים $f(\sqrt[3]{y}) = y$ ולכן לכל איבר בטווח יש מקור כלומר הפונקציה היא על.

(ג) f חח"ע, כי אם $f(q_1) = f(q_2)$ אז $2^{q_1} = 2^{q_2}$ ולכן $q_1 = q_2$. f לא על, כי ל: $2^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ אין מקור (הרי $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

(ד) f חח"ע, כי אם $f(B_1) = f(B_2)$ אז $A \backslash B_1 = A \backslash B_2$ ולכן $(A \backslash B_1)^c = (A \backslash B_2)^c$, והרי:

$$(A \backslash B_1)^c = B_1$$

$$(A \backslash B_2)^c = B_2$$

מכיוון שהמשלים הוא ביחס לקבוצה A, ולכן סה"כ אכן $B_1 = B_2$ ולכן הפונקציה חח"ע. f על, מכיוון שלכל $B \in P(A)$, $A \backslash B \in P(A)$ מקיימת:

$$f(A \backslash B) = A \backslash (A \backslash B)) = B.$$

3. נצטייד בהגדרות ונצא לדרך:

(א) $(x \in f^{-1}(D_1 \cup D_2)) \leftrightarrow (f(x) \in D_1 \cup D_2) \leftrightarrow ((f(x) \in D_1) \vee (f(x) \in D_2)) \leftrightarrow ((x \in f^{-1}(D_1)) \vee (x \in f^{-1}(D_2))) \leftrightarrow (x \in f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2))$ כל המעברים הם לשני הצדדים, ונובעים מיידית מההגדרה של התמונה ההפוכה ומההגדרה של איחוד. לכן (לפי הכלה דו־כיוונית) $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$.

(ב) $(x \in f^{-1}(D_1 \cap D_2)) \leftrightarrow (f(x) \in D_1 \cap D_2) \leftrightarrow ((f(x) \in D_1) \wedge (f(x) \in D_2)) \leftrightarrow ((x \in f^{-1}(D_1)) \wedge (x \in f^{-1}(D_2))) \leftrightarrow (x \in f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2))$ שוב, כל המעברים הם לשני הצדדים ונובעים מיידית מההגדרות של תמונה הפוכה ושל חיתוך, ולכן (לפי הכלה דו־כיוונית) $f^{-1}(D_1 \cap D_2 = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$.

(ג) נפריך ע"י דוגמה נגדית: נבחר $X = \{1,2\}, Y = \{1,2,3\}$ ונגדיר $f : X \longrightarrow Y$ ע"י $f(x) = x$. ניקח $C_1 = \{1\}$, ונקבל $f(C_1^c) = \{2\}$ אך $(f(C_1))^c = \{1\}^c = \{2,3\} \neq \{1\}$.

(ד) $(x \in f^{-1}(D_1^c)) \leftrightarrow (f(x) \in D_1^c) \leftrightarrow (f(x) \notin D_1) \leftrightarrow (x \notin f^{-1}(D_1)) \leftrightarrow (x \in (f^{-1}(D_1))^c)$ כל המעברים הם לשני הצדדים ונובעים מיידית מההגדרות של תמונה הפוכה ושל משלים, ולכן (לפי הכלה דו־כיוונית) נקבל $f^{-1}(D_1^c) = (f^{-1}(D_1))^c$.

(ה) נפריך ע"י דוגמה נגדית: נבחר $X = \{1,2\}, Y = \{1\}$ ונגדיר $f : X \longrightarrow Y$ ע"י $f(x) = 1$. ניקח $C_1 = \{1,2\}, C_2 = \{1\}$ ואז $f(C_1 \backslash C_2) = f(\{2\}) = \{1\}$ אך $f(C_1) \backslash f(C_2) = \{1\} \backslash \{1\} = \phi \neq \{1\}$.

(ו) $(x \in f^{-1}(D_1 \backslash D_2)) \leftrightarrow (f(x) \in D_1 \backslash D_2) \leftrightarrow ((f(x) \in D_1) \wedge (f(x) \notin D_2)) \leftrightarrow ((x \in f^{-1}(D_1)) \wedge (x \notin f^{-1}(D_2))) \leftrightarrow (x \in f^{-1}(D_1) \backslash f^{-1}(D_2))$ כל המעברים הם לשני הצדדים ונובעים מיידית מההגדרה של תמונה הפוכה ושל הפרש, ולכן (לפי הכלה דו־כיוונית) נקבל $f^{-1}(D_1 \backslash D_2) = f^{-1}(D_1) \backslash f^{-1}(D_2)$.

4. נפריך ע"י דוגמה נגדית: נבחר $X = \{1,2,3,4\}$ ונגדיר $f : X \to X$ ע"י $f(x) = 1$.

ניקח $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$, ואז:

$$f(A\backslash B^c)=f(\phi)=\phi$$

אך:

$$f(A)\backslash(f(B))^c=\{1\}\backslash\{1\}^c=\{1\}\neq\phi.$$