תזכורת:

משוואת הגלים בקטע סופי:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < L\,, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L \\ u_t(x,0) = g(x), \qquad 0 \le x \le L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t \ge 0 \end{cases}$$

פתרון כללי:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right]$$

כאשר המקדמים הם מקדמי פורייה:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi nc}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

אם תנאי ההתחלה נתונים כצירוף של סינוסים או קוסינוסים, לא נשתמש במקדמי פורייה, אלא נעשה השוואת מקדמים.

תרגיל:

פתרו את משוואת הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} - 16u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \pi\,, t > 3 \\ u(x,3) = x, \qquad 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,3) = 4\sin(5x) - 2\sin(3x)\,, \qquad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

פתרון:

נבצע הזזה ע"י הפונקציה:

$$v(x,t) = u(x,t+3)$$

ואכן תנאי ההתחלה הם:

$$v(x,0) = u(x,3) = x$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,3) = 4\sin(5x) - 2\sin(3x)$$

והמד"ח:

$$v_{tt}(x,t) = u_{tt}(x,t+3)$$

$$v_{xx}(x,t) = u_{xx}(x,t+3)$$

$$0 = u_{tt}(x,t+3) - 16u_{xx}(x,t+3) = v_{tt}(x,t) - 16v_{xx}(x,t)$$

וקיבלנו משוואת גלים עבור v:

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0 \\ v(x,0) = x \\ v_t(x,0) = 4\sin(5x) - 2\sin(3x) \\ v(0,t) = u(0,t+3) = 0 \\ v(\pi,t) = u(\pi,t+3) = 0 \end{cases}$$

כעת נפתור את הבעיה על v.

<u>נבצע הפרדת משתנים:</u>

$$v(x,t) = X(x)T(t)$$

$$v_{tt} = X(x)T''(t)\,, v_{xx} = X''(x)T(t)$$

$$\Rightarrow X(x)T''(t) - 16X''(x)T(t) = 0$$

$$\boxed{\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{16T(t)} = -\lambda}$$

תנאי ההתחלה:

$$0 = v(0,t) = X(0)\cdot T(t) \Rightarrow X(0)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$0 = v(\pi,t) = X(\pi)T(t) \Rightarrow X(\pi)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0$$

קיבלנו:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

נפתור קודם כל את המד"ר עבור X:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = -\lambda \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

<u>נחלק ל – 3 מקרים:</u>

$0 \leq \lambda$ נקבל מקרים טריוויאלים.

<u>$\lambda > 0$:</u>

$$k^2 + \lambda = 0$$

$$k^2 = -\lambda$$

$$k = \pm i\sqrt{\lambda}$$

לכן:

$$X(x) = c_1\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

נציב תנאי התחלה:

$$0 = X(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$0 = X(\pi) = \underbrace{c_2}_{\neq 0} \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)$$

נניח ש - $c_2 \neq 0$ אחרת נקבל פתרון טריוויאלי.

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$$

$$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$$

$$\lambda_n = n^2, \qquad n = 1,2, \dots$$

אלו הע"ע.

$$\boxed{X_n(x) = c_n \sin(nx)}$$

ואלו הפ"ע.

נחזור אחורה:

$$\frac{T_n''(t)}{16T_n(t)} = -n^2$$

$$T_n''(t) + 16n^2 T_n(t) = 0$$

נפתור:

$$k^2 + 16n^2 = 0$$

$$k^2 = -16n^2$$

$$k = \pm 4in$$

ולכן:

$$\boxed{T_n(t) = a_n \cos(4nt) + b_n \sin(4nt)}$$

נחזור אחורה:

$$v(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n \sin(x)\,[a_n \cos(4nt) + b_n \sin(4nt)]$$

$$\Rightarrow v_n(x,t) = \sin(nx)\,[A_n \cos(4nt) + B_n \sin(4nt)]$$

לכן:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\,[A_n \cos(4nt) + B_n \sin(4nt)]$$

את מקדמי הטור נמצא ע"י תנאי התחלה:

$$x = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)$$

את A_n נמצא ע"י מקדמי פורייה (נצבע אינטגרציה החלקים):

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\left(-x\frac{\cos(nx)}{n}\right)_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx}_{=0}\right]$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi\overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n}}{n}\right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

לכן:

$$\boxed{A_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}}$$

$$v_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 4nB_n\sin(nx) = 4\sin(5x) - 2\sin(3x)$$

נבצע השוואת מקדמים:

$$n = 3 \Rightarrow 12B_3 = -2 \Rightarrow B_3 = -\frac{1}{6}$$

$$n = 5 \Rightarrow 20B_4 = 4 \Rightarrow B_5 = \frac{1}{5}$$

עבור $n \neq 3{,}5$ נקבל:

$$B_n = 0$$

נציב בטור שלנו:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(nx)\cos(4\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin(nx)\sin(4\pi t)$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\cos(4\pi t) - \frac{1}{6}\sin(3x)\sin(12t) + \frac{1}{5}\sin(5x)\sin(3t)$$

אבל נרצה לחזור ל – u ולכן נזכור כי:

$$v(x,t) = u(x,t+3)$$

אז נסמן $\tilde{t} = t + 3$ ואז:

$$u(x,\tilde{t}) = v(x,\tilde{t} - 3)$$

$$u(x,t) = v(x,t-3)$$

ולכן:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\cos\big(4\pi(t-3)\big)-\frac{1}{6}\sin(3x)\sin\big(12(t-3)\big)+\frac{1}{5}\sin(5x)\sin\big(3(t-3)\big)$$

■

<u>משוואת גלים לא הומוגני מסוג I:</u>

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+u=0, \qquad 0<x<\pi\,, t>0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=1+\cos^2(x) \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$$

האי הומוגניות מסוג I מתאפיינת שצד ימין של המשוואה יש את u <u>או</u> נגזרות מסדר ראשון של u.

פתרון של מד"ח לא הומוגנית מסוג I בדיוק כמו פתרון של ההומוגנית ע"י הפרדת משתנים:

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

$$X(x)T''(t)-X''(x)T(t)+X(x)T(t)=0$$

$$X(x)[T''(t)+T(t)]=X''(x)T(t)$$

$$\boxed{\frac{X''}{X}=\frac{T''+T}{T}=-\lambda}$$

נרצה לקיים את תנאי השפה:

$$u_x(x,t)=X'(x)T(t)$$

$$0=u_x(0,t)=X'(0)\underbrace{T(t)}_{\neq 0}\Rightarrow X'(0)=0$$

$$0=u_x(\pi,t)=X'(\pi)\underbrace{T(t)}_{\neq 0}\Rightarrow X'(\pi)=0$$

קיבלנו:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X}=\frac{T''+T}{T}=-\lambda \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$$

תחילה נפתור את המד"ר עבור X:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X}=-\lambda \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$$

<u>נחלק ל – 3 מקרים:</u>

<u>$\lambda = 0$:</u>

$$X''(x) = 0$$

$$\Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$$

$$X'(x) = c_1$$

$$\Rightarrow 0 = X'(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$0 = X'(\pi) = c_1$$

לכן:

$$X(x) = c_2$$

קיבלנו פתרון לא טריוויאלי $\boxed{X(x) = const}$.

<u>$\lambda < 0$:</u>

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k^2 = -\lambda \Rightarrow k = \pm \underbrace{\sqrt{-\lambda}}_{\text{ממשיים}}$$

פתרון כללי:

$$\boxed{X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}}$$

נגזור:

$$X'(x) = c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

נציב תנאי שפה:

$$0 = X'(0) = c_1\sqrt{-\lambda} - c_2\sqrt{-\lambda}$$

$$c_1 - c_2 = 0$$

$$c_1 = c_2$$

תאני שפה שני:

$$0 = X'(\pi) = c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}$$

נציב:

$$c_1 \underbrace{\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = c_2 = 0}$$

ולכן $\lambda < 0$ נותן לא פתרון טריוויאלי.

:$\lambda > 0$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k^2 = -\lambda \Rightarrow k = \pm i\sqrt{\lambda}$$

לכן:

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

נרצה להציב תנאי שפה:

$$X'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

$$0 = X'(0) = c_2\sqrt{\lambda} \Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

$$0 = X'(\pi) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi)$$

$$-c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

נניח כי $c_1 \neq 0$ אחרת נקבל את הפתרון הטריוויאלי:

$$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

$$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$$

$$\boxed{\lambda_n = n^2}$$

קיבלנו ע"ע. לכן הפ"ע הם:

$$X_n(x) = c_n \cos(nx), \qquad n = 0,1,2,\dots$$

(נשים לב שנוכל לאחד את התוצאות עבור $\lambda = 0$ ועבוא $\lambda > 0$, ופשוט נתחיל את n מ $0 -$ ולא מ $1 -$).

נחזור אחורה:

$$\frac{T_n''(t) + T_n(t)}{T_n(t)} = -n^2$$

$$\frac{T_n''(t)}{T_n(t)} + 1 = -n^2$$

$$T_n''(t) + (n^2 + 1)T_n(t) = 0$$

לכן:

$$k^2 + (n^2 + 1) = 0$$

$$k^2 = -(n^2 + 1)$$

$$\boxed{k = \pm i\sqrt{n^2 + 1}}$$

לכן:

$$\boxed{T_n(t) = a_n \cos\left(\sqrt{n^2+1}t\right) + b_n \sin\left(\sqrt{n^2+1}t\right)}$$

נציב בחזרה:

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n \cos(nx)\left[a_n \cos\left(\sqrt{n^2+1}t\right) + b_n \sin\left(\sqrt{n^2+1}t\right)\right]$$
$$= \cos(nx)\left[A_n \cos\left(\sqrt{n^2+1}t\right) + B_n \sin\left(\sqrt{n^2+1}t\right)\right]$$

לכן:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(nx)\left[A_n \cos\left(\sqrt{n^2+1}t\right) + B_n \sin\left(\sqrt{n^2+1}t\right)\right]$$

נציב תנאי התחלה:

$$0 = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \underbrace{\underbrace{\cos(nx)}_{\neq 0}}_{\text{כי הן פונקציות עצמיות}} \Rightarrow \boxed{A_n = 0}$$

$$1 + \cos^2 x = u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sqrt{n^2+1} \cos(nx)$$

ניעזר בזהות טריגונומטרית:

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$
$$\frac{\cos(2x)+1}{2} = \cos^2 x$$

לכן:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \sqrt{n^2+1} \cos(nx) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

נבצע השוואת מקדמים:

$$n = 0 \Rightarrow B_0 = \frac{3}{2}$$
$$n = 2 \Rightarrow \sqrt{5}B_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow B_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$
$$n \neq 0{,}2 : B_n = 0$$

קיבלנו פתרון סופי:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\cos(2x)\sin\left(\sqrt{5}t\right)}$$

<u>מד"ח לא הומוגנית מסוג II:</u>

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & 0 < x < L\,, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x < L \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \le x \le L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

<u>רעיון של פורייה:</u>

נציג את $u = u^h + u^p$ ונקבל:

$$\begin{cases} u^h_{tt} - c^2 u^h_{xx} = 0 \\ u^h(x,0) = f(x) \\ u^h_t(x,0) = g(x) \\ u^h(0,t) = u^h(L,t) = 0 \end{cases}, \begin{cases} u^p_{tt} - c^2 u^p_{xx} = F(x,t) \\ u^p(x,0) = 0 \\ u^p_t(x,0) = 0 \\ u^p(0,t) = u^p(L,t) = 0 \end{cases}$$

<u>נפתור את u^h:</u>

$$u^h = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right]$$

כאשר a_n, b_n נחשב ע"י מקדמי פורייה או השוואת מקדמים.

<u>תגלית של פורייה:</u>

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$q_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L F(x,t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$\boxed{u_p = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

<u>דוגמה:</u>

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = xt \\ u(x,0) = \sin(4x) \\ u_t(x,0) = \sin(3x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

נפצל ל – 2 מערכות:

$$\begin{cases} u^h_{tt} - u^h_{xx} = 0 \\ u^h(x,0) = \sin(4x) \\ u^h_t(x,0) = \sin(3x) \\ u^h(0,t) = u^h(\pi,t) = 0 \end{cases}, \begin{cases} u^p_{tt} - u^p_{xx} = xt \\ u^p(x,0) = 0 \\ u^p_t(x,0) = 0 \\ u^p(0,t) = u^p(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

נפתור את ההומוגנית:

$$u^h(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)\,[a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)]$$

$$\sin(4x)=u^h(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx)$$

$$n=4\Rightarrow\boxed{a_4=1}$$

$$\sin(3x)=u_t^h(0,t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,b_n\sin(nx)$$

$$n=3\Rightarrow 3b_3=1\Rightarrow\boxed{b_3=\frac{1}{3}}$$

לכן:

$$\boxed{u^h=\sin(3x)\frac{1}{3}\sin(3t)+\sin(4x)\cos(4t)}$$

כעת:

$$xt=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)\sin(nx)$$

$$q_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xt\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$q_n(t)=\frac{2t}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(nx)\,dx=2t\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

לכן:

$$\boxed{xt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)}$$

$$\boxed{u_p=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(t)\sin(nx)}$$

נציב את שני המשוואות הנ"ל במד"ח של u^p:

$$u_{tt}^p-u_{xx}^p=xt$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}h_n''(t)\sin(nx)+\sum_{n=1}^{\infty}n^2h_n(t)\sin(nx)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[h_n''(t)+n^2h_n(t)]\sin(nx)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

$$\forall n:\ h_n''(t)+n^2h_n(t)=\frac{2t(-1)^{n+1}}{n}$$

ואלו n מד"רים מסדר שני ואותם צריך לפתור כעת...