מבחן 2007 מועד א

שאלות 1,2 - משפטים

שאלה 3

תהיינה $A, B \lhd G$ כך ש$A \cap B = \{e\}$. הוכח כי $A \otimes B = A \cdot B \cong A \times B$

פתרון

נגדיר העתקה $\varphi : A \times B \to A \cdot B$[1] לפי $\varphi(a, b) = a \cdot b$. צריך להראות ש$\varphi$ הומומורפיזם.

$$a \cdot c \cdot b \cdot d = \varphi((a \cdot c, b \cdot d)) = \varphi((a, b) \cdot (c, d)) \stackrel{?}{=} \varphi(a, b) \cdot \varphi(c, d) = a \cdot b \cdot c \cdot d$$

רוצים $c \cdot b = b \cdot c$ לכל $c \in A$ ו$b \in B$. נוכיח כי $c \cdot b = b \cdot c$ לכל $c \in A, b \in B$.

$$[c, b] = cbc^{-1}b^{-1} \begin{array}{l} = \left(cbc^{-1}\right) b^{-1} \\ = c\left(bc^{-1}b^{-1}\right) \end{array}$$

- B נורמלית ולכן $cbc^{-1} \in B$. מאידך גם $b^{-1} \in B$, ולכן $[c, b] \in B$
- A נורמלית, ולכן $bc^{-1}b^{-1} \in A$. מאידך, $c \in A$ ולכן $[c, b] \in A$

$\Leftarrow [c, b] = e \Leftarrow cbc^{-1}b^{-1} = cb = bc$.

שאלה 4

החבורה S_4 פועלת על פולינומים בארבעה משתנים באופן הבא:

$$\sigma(f(x_1, x_2, x_3, x_4)) = f(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, x_{\sigma_3}, x_{\sigma_4})$$

מצאו את גודל המייצב והמסלול של הפולינום $x_1 \cdot x_2$ $(f(x_1, x_2, x_3, x_4) =)$

פתרון

מספיק למצוא גודל של אחד, ואת השני נקבל לפי הנוסחה $|\theta(x)| \cdot |\mathrm{St}_x| = |\sigma|$

$$\theta(f) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4\}$$

$$|\theta(f)| = 6$$

דרך אחרת היא לחשוב על התמורות שמשאירות את f במקום. x_1, x_2 צריכים ללכת לעצמם(כלומר כל אחד לעצמו או אחד לשני), ואותו דבר עם x_3, x_4, ולכן

$$\mathrm{St}_f = \{\mathrm{id}, (1,2), (3,4), (1,2)(3,4)\}$$

[1] $A \cdot B$ חבורה כי A וB נורמליות

שאלה 5

מיין את החבורות מסדר 121

פתרון

ישנה עובדה כי כל חבורה מסדר p^2 כאשר p ראשוני היא אבלית. לכן כל חבורה מסדר $121 = 11^2$ היא אבלית, ואפשר להשתמש במשפט היסודי של חבורות אבליות, ואז החבורה היא $\mathbb{Z}_{121}$ או $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$.

נוכיח את הטענה שאם $|G| = p^2$ אז G אבלית

נביט במשוואת המחלקות $|G| = |Z_G| + \sum_x |\text{conj}(x)|$ (כאשר x הוא נציג מחלקה המכיל יותר מאיבר אחד) ונניח בשלילה כי $|G| > |Z_G|$.

ניקח $x \notin Z_G$. מצד אחד $|\text{conj}(x) = p|$ ולכן $|Z_x| = \frac{p^2}{p} = p$.

עכשיו, אם ניקח את משוואת מהחלקות מודולו p נקבל

$$0 \equiv |Z_G| \pmod{p} \Rightarrow |Z_G| \in \left\{\cancel{\emptyset}, p, \cancel{p^2}\right\} \Rightarrow |Z_G| = p$$

שאלה 6

הוכח או הפרך כי כל חבורה מגודל

א. 6

ב. 7

ג. 8

היא פשוטה

פתרון

א. דוגמה נגדית: $\mathbb{Z}_6$ לא פשוטה כי $3\mathbb{Z}_6 \lhd \mathbb{Z}_6$
(כל חבורה מגודל 6 היא לא פשוטה משום שהיא תמיד מכיל ת"ח מגודל 3 והאינדקס שלה הוא 2)

ב. כל חבורה מגודל ראשוני היא ציקלית ולכן איזומורפית ל$\mathbb{Z}_p$, וכל איבר פרט לאיבר היחידה הוא יוצר. כלומר אין לה תת-חבורות לא טריוויאליות בכ-לל(ובפרט לא נורמליות) ולכן היא פשוטה.
כל חבורה מגודל 7 היא פשוטה.

ג. דוגמה נגדית: $\mathbb{Z}_8 \rhd 2\mathbb{Z}_8 \cong \mathbb{Z}_4$
(כל חבורה מסדר 8 היא לא פשוטה.

- אם $\exp(G) = 8$ אז קיים איבר x מסדר 8 ואז הוא יוצר ולכן החבורה היא ציקלית ואז היא איז' ל$\mathbb{Z}_8$.

- אם $\exp(G) = 4$ ואז קיים איבר x מסדר 4 ואז $H = \langle x \rangle$ היא מאינדקס $\frac{8}{4} = 2$ ולכן $H \lhd G$
- אם $\exp(G) = 2$ אז G אבלית, ובפרט החבורה היחידה(עד כדי איז') אבלית מסדר 8 עם אקספוננט 2 היא $\mathbb{Z}_2 \times \{0\} \times \{0\} \lhd \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$]

שאלה 7

הוכח או הפרך:

א. S_4 פתירה.

ב. S_6 פתירה.

פתרון

א. הוכחה:

$$S_4 \rhd A_4 \rhd \underbrace{V_4}_{=\left\{\begin{array}{c} id, (1,2)(3,4), \\ (1,3)(2,4), \\ (1,4)(2,3) \end{array}\right\}} \rhd \{id\}$$

$S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$, $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}_3$ ו-V_4 היא אבלית.

- צריך להסביר למה $A_4 \rhd V_4$. אם לוקחים $\sigma \in V_4$ ומצמידים אותה בתמורה מ-S_4 או מ-A_4 אז לא משנים את מבנה המחזורים של σ, ו-V_4 מכילה את כל התמורות ממבנה מחזורים $2,2$.

כל הגורמים אבליים, ולכן S_4 פתירה.

ב. S_6 לא פתירה.

$$S_6' = A_6$$

$$[a, \tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$$

$$\operatorname{sign}[\sigma, \tau] = 1$$

$$[(1,2), (1,3)] = (1,2)(1,3)(1,2)(1,3) = (2,3)(1,3) = (1,2,3)$$

ובנוסף $S_6'' = A_6' = A_6$. $A_6' \neq \{id\}$ ומכיוון ש-A_6 פשוטה, $A_6' = A_6$ ולכן $S_6^{(n)} = A_6$ ולכן S_6 לא פתירה.
נוכיח ש-$A_6' = A_6$. נראה שאפשר לקבל כל מחזור מאורך 3 כקומוטטור:

$$[(a,b,c), (a,d,e)] = (a,b,c)(a,d,e)(c,b,a)(e,d,a) = (b,d,e)(e,d,a) =$$

$$= (b,d,e)\,(e,d,a) = (a,b,d)$$

מבחן 2008 מועד א

שאלה 4

נניח שקיים אפימורפיזם בין S_5 ל-G. מה יכולה להיות G עד כדי איזומורפיזם?

פתרון

לפי משפט האיזומורפיזם הראשון $G \cong {}^{S_5}/_{H}$ כאשר $H \lhd S_5$. אבל זה אומר ש-$H \in \{S_5, A_5, \{\text{id}\}\}$ ולכן G היא

- או ${}^{S_5}/_{S_5} \cong \{e\}$
- או ${}^{S_5}/_{A_5} \cong \mathbb{Z}_2$
- או ${}^{S_5}/_{S_{\{e\}}} \cong S_5$

שאלה 5

מיין את החבורות מסדר 9, 38 ו-77 עד כדי איזומורפיזם.

תשובה

- $9 = 3^2 \Leftarrow$ לכן כל חבורה מסדר 9 אבלית $\Leftarrow \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
- $38 = 2 \cdot 19 \Leftarrow I_2\,(19)\,, \mathbb{Z}_{39}$
- $77 = 7 \cdot 11$. [יש עובדה שאם q, p ראשוניים, $q > p$, $q \not\equiv 1 \pmod p$ אז החבורה מגודל p היא ציקלית ואיזומורפית ל-$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$]
  ולכן החבורה היא $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{11} \cong \mathbb{Z}_{77}$

שאלה 6

הוכח או הפרך כי כל חבורה מסדר

א. 119

ב. 120

ג. 121

פתירה

פתרון

[הערה: איך בודקים אם n ראשוני? עוברים על המספרים $2,3,...\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ ובודקים אם הם מחלקים אותו]

א. $119 = 7 \cdot 17$ ולכן היא אבלית ולכן פתירה.

וכן הלאה...

שאלה 7

הוכח כי A_4 אינה פשוטה.

הוכחה

$A_4 \triangleright V_4$. לכל תמורה השונה מהזהות בV_4 יש מבנה מחזורים $2,2$. אם מצמידים אותה בתמורה מA_4 היא נשארת עם מ"מ $2,2$, אבל V_4 כוללת את כל התמורות ממבנה מחזורים זה $\Leftarrow$ V_4 סגורה להצמדה.