הבוחן נדחה ל$21/12$
חומר- עד היום, כולל (חומר סופי יתפרסם בשבוע הבא)

קוסטים

תהי G חבורה ו$H \leq G$, באמצעות H ניתן להגדיר שני יחסי שקילות על G:

1. $g_1 \sim g_2$ אמ"ם $g_1^{-1}g_2 \in H$ (בהרצאה הוכחתם שאכן מתקבל יחס שקילות)
2. $g_1 \sim g_2$ אמ"ם $g_2 g_1^{-1} \in H$.

דוגמאות:

1. אם $H = G$. אז נשים לב שכל שני אבירים מG שקולים. כי לכל g_1, g_2 מתקיים ש $g_1^{-1}g_2 \in H$ וגם $g_2 g_1^{-1} \in G$. כלומר, עבור שני יחסי השקילות האלה יש רק מחלקת שקילות אחת- כל G.
2. $H = \{e\}$. נשים לב שאם $g_1 \sim g_2$ אז $g_1^{-1}g_2 \in \{e\}$ כלומר $g_1^{-1}g_2 = e$ כלומר $g_1 = g_2$. ולכן כל איבר נמצא במחלקת שקילות רק עם עצמו. כנ"ל לגבי היחס השני.

הגדרה:

1. מחלקות השקילות ביחס ליחס השקילות הנ"ל נקראת "קוסטים שמאליים של H". ואם $g \in G$, אז $[g]$ נקראת הקוסט השמאלי של g בH.
2. מחלקות השקילות ביחס ליחס השקילות הנ"ל נקראת "קוסטים ימניים של H". ואם $g \in G$, אז $[g]$ נקראת הקוסט הימני של g בH.

איך נראות מחלקות השקילות במפורש:

1. $g_1^{-1}g_2 \in H$ זה קורה אמ"ם $g_2 \in g_1 H$.
2. באופן זהה הקוסטים הימניים הם מהצורה Hg_1.

דוגמאות:

1. $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ו$H = \mathbb{Z} \times \{e\}$. מצאו את הקוסטים השמאליים.
פתרון: לכל $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \{n\}$ מהווה מחלקת שקילוץ.
הסבר: יהי (m,n). מי מחלקת שקילות שלו?

$$(m,n) + \mathbb{Z} \times \{e\} = \mathbb{Z} \times \{n\}$$

2. $G = S_3$ ו$H = \langle (1,2) \rangle$. מצאו את המחלקות השמאליות והימניות.
פתרון: נתחיל משמאליות.

$$eH = H = \{(1,2), e\}$$

$$(1,3)H = \{(1,3), (1,2,3)\}$$

$$(2,3)H = \{(2,3), (1,3,2)\}$$

מחלקות ימניות:

$$He = \{(1,2), e\}$$

$$H(1,3)=\{(1,3)(3,2,1)\}$$

$$H(2,3)=\{(2,3),(1,2,3)\}$$

משפטים מההרצאה:
1. מספר הקוסטים הימניים שווה למספר הקוסטים השמאליים.
2. העוצמה של כל קוסט (ימני/שמאלי) שווה לעוצמת H.

הדגשים:
1. $gH=H$ אמ"ם $g\in H$.
2. $g_1H=g_2H$ אמ"ם $g_1^{-1}g_2\in H$ אמ"ם $g_2^{-1}g_1\in H$.

תתי חבורות נורמליות

הגדרה: תהי G חבורה ו $H\leq G$, H נקראת תת חבורה נורמלית אם לכל איבר הקוסט הימני שלו שווה לקוסט השמאלי. כלומר, לכל $g\in G$, $gH=Hg$. (שוויון של קבוצות!)

דוגמאות בסיסיות:
1. $H=G$ היא תת חבורה נורמלית, כי $gG=G=Gg$
2. $H=\{e\}$ ראינו ש$g\{e\}=g=\{e\}g$
3. אם G היא חבורה אבלית, אז כל תת חבורה היא נורמלית.

תרגיל:

תהי G H תת חבורה מאינדקס 2 (אינדקס= מספר הקוסטים השמאליים= מספר הקוסטים השמאליים. מסמנים:

$$([G:H]$$

הוכיחו שH היא תת בחורה נורמלית.

פתרון: קוסטים הם בעצם מחלקות שקילות. ידוע שמחלקות שקילות שונות זרות ואיחודן שווה לכל G. לכן ביחס שקילות הימני מחלקות השקילות שוות לH ול$G\setminus H$ ואותו דבר גם ביחס השמאלי. כי יש 2 מחלקות שקילות. ותמיד יש מחלקת שקילות ששווה לH- המחלקה של e, גם ביחס הימני וגם ביחס השמאלי.

יהי $g\in G$.

$$gH=H\iff g\in H\iff Hg=H$$

ואם g לא שייך לH אז הוא בהכרח במחלקת השקילות השניה גם עבור היחס הימני וגם עבור היחס השמאלי, ולכן

$$gH=Hg$$

תזכורת: אם G חבורה סופית אז

$$[G:H]=\frac{|G|}{|H|}$$

קריטריון: H היא תת חבורה נורמלית אמ"ם היא סגורה להצמדות, כלומר, לכל $g\in G$ $gHg^{-1}\subseteq H$. כלומר, לכל $g\in G$ ו$h\in H$, $ghg^{-1}\in H$.

סימון: אם H תת חבורה נורמלית בG, מסמנים $H\trianglelefteq G$.

דוגמאות:

1. $SL_n(\mathbb{F})\trianglelefteq GL_n(\mathbb{F})$

הוכחה: יהיו $A\in GL_n(\mathbb{F}),B\in SL_n(\mathbb{F})$ צריך להראות ש:

$$ABA^{-1}\in SL_n(\mathbb{F})$$

$$|ABA^{-1}|=|A||B||A^{-1}|=|A||A|^{-1}=1$$

2. תהי G חבורה כלשהי ונגדיר

$$F=\prod_{i\in I}G$$

$$F=\{f:I\to G\}$$

הרכיב במקום הi שווה ל$f(i)$.

מכפלה אינסופית של עותקים של G.

האיברים הם וקטורים אינסופיים שבכל רכיב נמצא איבר מG והפעולה היא רכיב-רכיב. איבר היחידה הוא הוקטור הקבוע על e. (או בשפה אחרת: האיברים הם פונקציות, הפעולות הן רכיב רכיב, ואיבר היחידה הוא הפונקציה הקבועה על e)

H תהיה התת חבורה של כל הוקטורים שרק במספר סופי של רכיבים לא שווים לe.

הוכיחו ש$H\trianglelefteq F$.

פתרון: יהיו $a\in F,b\in H$.

צריך לחשב את:

$$aba^{-1}$$

יש תת קבוצה סופית $J\subseteq I$ כך ש$b(j)\neq e$ לכל $j\in J$ ולכל $i\in I\setminus J$, $b(i)=e$.

$$\forall i\in I\setminus J: aba^{-1}(i)=a(i)b(i)a^{-1}(i)=a(i)ea(i)^{-1}=e$$

קיבלנו שיש לכל היותר תת קבוצה סופית שבה aba^{-1} לא שווה לe.

3. תהי G חבורה כלשהי. וH האוסף של כל האיברים מסדר סופי. הוכיחו שאם H היא תת חבורה, אז היא תת חבורה נורמלית.

הוכחה: יהיו $h\in H$ ו$g\in G$. צריך להוכיח ש$ghg^{-1}\in H$.

ידוע שh מסדר סופי. נניח n. צריך להוכיח שghg^{-1} הוא מסדר סופי.

$$(ghg^{-1})^n = gh^ng^{-1} = geg^{-1} = e$$

ולכן $o(ghg^{-1}) \leq n$.
למעשה אפשר להראות ש$o(ghg^{-1}) = o(h)$ ע"י הצמדה בg^{-1}.
תרגיל: האם נורמליות היא טרנזיטיבית? כלומר, נניח ש$K \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ האם זה אומר ש$K \trianglelefteq G$?
פתרון: לא. למשל. נקח

$$G = D_4$$

$$H = \langle \sigma^2, \tau\sigma \rangle$$

$$H \trianglelefteq G$$

כי

$$[G:H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{8}{4} = 2$$

$$K = \langle \tau\sigma \rangle$$

$$K \trianglelefteq H$$

כי

$$[H:K] = \frac{|H|}{|K|} = \frac{4}{2}$$

K לא נורמלית בG, למשל כי

$$\tau\langle \tau\sigma \rangle = \{\tau, \sigma\} \neq \{\tau, \sigma^{-1}\} = \langle \tau\sigma \rangle\tau$$

חבורות מנה

תהי G ו$G \trianglelefteq H$. אז אוסף הקוסטים של H בG מהווה חבורה, כאשר הפעולה היא כמו הפעולה של G על נציגים ממחלקות השקילות. כלומר

$$[g_1][g_2] = [g_1g_2]$$

שקול:

$$g_1Hg_2H = g_1g_2H$$

מי איבר היחידה?

$$H = [e]$$

מי ההופכי של gH?

$$g^{-1}H$$

למעשה, מכפילים בצורה רגילה, וכל איבר בH שקול מבחינתנו לאיבר היחידה.
דוגמאות:

1. $G = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, H = \mathbb{Z}\times\{e\}$. ברור ש$H$ נורמלית בG כי G אבלית.

$$G/H = ?$$

ראינו שהמחלקות הן

$$\forall n\in\mathbb{Z} : \mathbb{Z}\times\{n\}$$

$$\mathbb{Z}\times\{n\} + \mathbb{Z}\times\{m\} = \mathbb{Z}\times\{n+m\}$$

ניתן לראות שהחבורה איזומורפית ל$\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}\to G/H$$

$$n\to\mathbb{Z}\times\{n\}$$

ראינו שהפונקציה הזאת היא הומומורפיזם, וברור שהיא חח"ע ועל.

2. $G = \mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ ו$H = \langle(1,1)\rangle$ H נורמלית כי G אבלית. ננסה להבין את G/H.

פתרון:

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{16}{4} = 4$$

נשים לב ש$a-c = b-d \iff (a,b)\sim_H (c,d)$. נבחר $(1,0),(2,0),(3,0),(0,0)$ אילו איברים שלא שקולים אחד לשני. ומכיוון שאנחנו יודעים שיש 4 מחלקות אז אילו הנציגים של כל המחלקות.

$$(1,0)+(1,0) = (2,0)$$

$$(1,0)+(2,0)=(3,0)$$

וכו'...
מצאנו איבר בחבורת מנה שהסדר שלו הוא 4. לכן G/H איזומורפית ל$\mathbb{Z}_4$.
תרגיל: אם G אבלית אז G/H אבלית.
הוכחה:

$$g_1Hg_2H=g_1g_2H=g_2g_1H=g_2Hg_1H$$

שאלה: אם $G/H\neq\{e\}$ אבלית, האם G אבלית?
תשובה: $G=D_4$ $H=\langle\sigma\rangle$. G לא אבלית, H נורמלית כי היא מאינדקס 2, והמנה היא חבורה מגודל 2 ולכן היא בהכרח אבלית.
תרגיל: אם G ציקלית אז G/H ציקלית.
הוכחה:

$$G=\langle a\rangle$$

ונטען ש

$$G/H=\langle aH\rangle$$

ובכן איבר כללי בG/H הוא מהצורה gH. ידוע ש$g=a^m$. אז

$$gH=a^mH=(aH)^m$$

קיבלנו שכל איבר בG/H הוא איזשהי חזקה של aH.
רגיל: תהי G חבורה כלשהי וH תת החבורה של כל האיברים מסדר סופי. הוכיחו שבG/H אין איברין מסדר סופי חוץ מאיבר היחידה.
הוכחה: יהי $gH\in G/H$. נניח שהוא מסדר סופי ונוכיח שהוא שווה לH.

$$(gH)^n=H$$

$$(gH)^n=g^nH$$

כלומר,

$$g^nH=H$$

קורה אמ"ם

$$g^n\in H$$

עכשיו ידוע שכל איבר ב־H הוא מסדר סופי. לכן קיים איזשהו m כך ש־$(g^n)^m = e$. כלומר, g מסדר סופי. כלומר, $g \in H$. וזה אומר ש־$gH = H$. נובע שהתחלנו מלכתכילה עם איבר היחידה ב־G/H.

תרגיל: תהי G חבורה ו־$H \trianglelefteq G$ כך ש־$[G:H] = n$. הוכיחו שלכל $g \in G$, $g^n \in H$.

פתרון: נסתכל על $gH \in G/H$. ידוע ש־$n = [G:H] = |G/H|$. וניזכר כי בחבורה מסדר n כל איבר בחזקת n שווה לאיבר היחידה.

$$(gH)^n = H$$

$$(gH)^n = g^n H$$

קיבלנו ש־$g^n H = H$. קורה אמ"ם $g^n \in H$.

תרגיל: נניח ש־$G/H \neq \{e\}$ ציקלית, האם זה אומר ש־G ציקלית?

פתרון: $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ו־$H = \mathbb{Z}_2 \times \{e\}$.

$$G/H \cong \mathbb{Z}_2$$