בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן

מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)

מספרי הקורס: 88211

המרצה: מיכאל מגרל

המתרגלים: לואי פולב ודורון פרלמן

תאריך: 04.10.2011 מועד א'

# פתרון:

**1. א. הוכיחו את משפט Sylow 3**

הוכחה בהרצאה.

**ב. תהא $G$ חבורה מסדר 21 כך שיש בה יותר משני איברים מסדר 3. הראו כי $G$ לא אבלית אבל פתירה.**

<u>פתרון:</u>

$r_7 | 3 \wedge r_7 \equiv 1 \pmod 7 \to r_7 = 1$, כמו כן:

$r_3 | 7 \wedge r_3 \equiv 1 \pmod 3 \to r_3 \in \{1,7\}$.

אבל $r_3 \neq 1$ כי יש יותר משני איברים מסדר 3, ולכן $r_3 = 7$. אבל אז חבורת 3-סילו אינה נורמלית ולכן $G$ אינה אבלית.

פתירות נובעת מהטענה שכל חבורה מסדר $pq$ עם $p,q$ ראשוניים היא פתירה.

**ג. חבורה $G$ בעלת 15 אלמנטים פועלת מעל קבוצה עם 30 אלמנטים. הוכיחו או הפריכו: קיימת נקודת שבת.**

<u>פתרון:</u>

**הפרכה**

קח חבורה $G$ בת 30 איברים שיש בה תת חבורה $H \leq G$ בעלת 15 איברים

(למשל שורשי יחידה $H := \Omega_{15} \leq G := \Omega_{30}$)

נגדיר פעולה $H \times G \to G, h * g = hg$

**2. א. נניח $Q:=\{1,-1,i,j,k,-i,-j,-k\}$ חבורה בפעולת הכפל המוגדרת ע"י $ijk=k^2=i^2=j^2=-1$.**

**השלימו את טבלת הכפל והוכיחו שכל ת"ח של $Q$ היא נורמלית ב $Q$.**

**ב. מצאו תמונות אפימורפיות של $Q$ (עד כדי איזומורפיזמים).**

**ג. תנו דוגמאות של 5 חבורות לא איזומורפיות עם 8 איברים.**

פתרון:

חלק מהתשובות לשאלה זו נמצאות בתרגילים הבית או תרגילי הכיתה. למשל מיון של ת"ח והעובדה שהן כולן נורמליות ב $Q$.

**בסעיף ב.** תמונות אפימורפיות של $Q$ (עד כדי איזומורפיזמים):

$Q \quad \Omega_2\times\Omega_2 \quad \Omega_2,\Omega_1$

מקרים של $Q/Q\cong\Omega_1$ $Q/\{e\}\cong Q$ טריוויאליים.

מקרה של $\Omega_2\cong Q/H$ ברור משיקולים של משפט לגרנז אחרי שיש ת"ח (נורמלית) $H\le Q$ עם 4 אלמנטים.

מקרה של חבורת קליין $\Omega_2\times\Omega_2$ מתקבל משיקולים הבאים: יש רק ת"ח אחת עם 2 איברים והיא $H:=\{1,-1\}$. היא נורמלית ב $Q$. $Q/H$ היא חבורה עם 4 איברים. היא אבלית ולכן יש רק 2 מקרים: ציקלית או חבורת קליין. בחבורת מנה $Q/H$ מתקיים $[k]^2=[i]^2=[j]^2=e$ לכן ב $Q/H$ אין איבר מסדר 4. מכאן $Q/H$ איזומורפית ל $\Omega_2\times\Omega_2$.

**בסעיף ג.** התשובה היא $Q,D_4,\mathbb{Z}_8,C_4\times C_2,C_2^3$

($D_4$ לא אזומורפי ל $Q$ לפי שיעורי בית הנ"ל)

**3. א. תנו דוגמה של מונואיד $(X,\cdot)$ עם 8 איברים כך שלא קיימת חבורה המכילה את $(X,\cdot)$ כתת מבנה.**

<u>פתרון:</u> למשל המונואיד $(\mathbb{Z}_8,\cdot)$ לא יכול להיות תת מבנה של חבורה היות ולא מתקיים בו חוק הצמצום (למשל...)

**ב. נגדיר פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(n)=3n$ . הוכיחו שבמונואיד $Map(\mathbb{N},\mathbb{N})$**

**איבר $f$ הוא הפיך רק מצד אחד.**

<u>פתרון:</u> $f$ הפיכה מצד שמאל וההפכית שלה היא כל $g:f(\mathbb{N})\to\mathbb{N}$ המקיימת $\forall n\in\mathbb{N}\ \ g(3n)=n$. קל לראות שמתקיים $g\circ f=Id_{\mathbb{N}}$. קח למשל $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N},g(n)=[n]$ "חלק שלם"

מצד שני, נראה ש- $f$ אינה הפיכה מימין. נניח בשלילה שכן, משמע קיימת פונקציה $h$ כך ש- $f \circ h = Id$ . אך קל לבדוק (וגם ידוע מבדידה) כי אז $f$ היא פונקציה על. זאת סתירה, שכן לא קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$f(n)=1$ .

**ג. הוכיחו את משפט Euler על החזקות ובאמצעות המשפט פתרו את המשוואה** $127^{301}x \equiv 2011 \bmod 99$**.**

פתרון: הוכחה למשפט אוילר – בהרצאה.

הפתרון לתרגיל: שימוש במשפט אוילר: $x = 40$ .

**4. א. הראו שחבורה סופית היא מסדר זוגי אם ורק אם קיים בה איבר מסדר 2.**
פתרון:כיוון ראשון: אם החבורה מסדר זוגי אזי לפי משפט קושי קיים בה איבר מסדר 2. כיוון שני: אם קיים איבר מסדר 2, אזי לפי משפט לגרנז' סדר החבורה חייב להיות זוגי.

**ב. מצאו את כל המונומורפיזמים** $f: U_{10} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ **.**

פתרון: $U_{10} = \{[1],[3],[7],[9]\}$ ו-[3] הוא היוצר שלה והוא מסדר 4. יש לשלוח אותו לאיבר מסדר 4 בתוך $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . זה קובע חד-משמעית את המונומורפיזם כי $U_{10}$ ציקלית. אבל שימו לב- $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong T = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ . יש במעגל היחידה בדיוק שני איברים מסדר 4 $\{i, -i\}$ ולכן יש שני מונומורפיזמים כאלה.

**ג. הוכיחו שסכום ישר** $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ **הוא חבורה ציקלית אם ורק אם** $(m,n)=1$**.**
פתרון: הוכחה בהרצאה עבור $C_m \times C_n$ . קח בחשבון ש $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong C_m \times C_n$ .

**5. א. חבורה** $S_6$ **פועלת מעל חבורה** $A_6$ **על ידי הצמדות. נמקו מדוע הפעולה מוגדרת היטב ומצאו את מספר המסלולים של הפעולה** $S_6 \times A_6 \to A_6$ **.**
פתרון: הפעולה מוגדרת היטב שכן $A_6 \lhd S_6$ .
מספר המסלולים הוא מספר מחלקות הצמידות של $A_6$ .
מספר טיפוסים ששיכים ל $A_6$ .
בס"ה מספר טיפוסים שווה למספר חלוקות של 6
(משמאל נסמן את הזוגיות של הטיפוס)

| | |
|---|---|
| 6 | + |
| 5+1 | - |
| 4+2 | + |
| 4+1+1 | - |
| 3+3 | + |

| | |
|---|---|
| 3+2+1 | - |
| 3+1+1+1 | + |
| 2+2+2 | - |
| 2+2+1+1 | + |
| 2+1+1+1+1 | - |
| 1+1+1+1+1+1 | + |

בס"ה 11, מהם יש 6 זוגיים. לכן התשובה (מספר מסלולים) שווה 6.

ב. כמה איברים מתחלפים עם $a=(3,5,1,6)$ בחבורה $S_8$ ?

<u>פתרון:</u> אנו מחפשים: $\left|\{b\in S_8:\ ba=ab\}\right|=\left|\{b\in S_8: bab^{-1}=a\}\right|=\left|Stb(a)\right|$ (הגודל של המייצב ביחס לפעולת ההצמדה). $\left|Stb(a)\right|=\frac{|S_8|}{|S_8*a|}$ כאשר $|S_n*a|$ הוא גודל מחלקת הצמידות של $a$. $S_n*a$ מכילה את כל המחזורים מאורך 4, ויש $\binom{8}{4}\frac{4!}{4}$ כאלה. לכן: $|Stb(a)|=\frac{|S_8|}{|S_8*a|}=\frac{8!}{\binom{8}{4}\frac{4!}{4}}=96$.

**ג. תהא $G$ חבורה מסדר 28. הוכיחו:**

**a) קיימת תת חבורה 7-סילו נורמלית.**

**b) אם $G$ לא אבלית אזי $|G'|=7$ .**

**c) אם $G$ לא אבלית ויש לה תת חבורה נורמלית מסדר 2, אזי $G/Z(G)\cong D_7$ .**

פתרון של ג' בתרגול 8.

**שאלת הבונוס: (5 נקודות)**

נניח $F(a,b)$ מסמן חבורה חופשית מעל קבוצה $\{a,b\}$. הוכיחו שלכל חבורה סופית $G$ קיימת ת"ח $X\le F(a,b)$ ות"ח נורמלית $H\lhd X$ כך ש $G$ איזומורפית ל $X/H$.

הוכיחו גם שקיימת חבורה סופית $G$ כך שהיא לא איזומורפית לחבורת מנה של $F(a,b)$.

פתרון: (החלק הראשון) לפי משפט קיילי חבורה $G$ איזומורפית לתת חבורה $G_0\le S_n$ כאשר $|G|=n$. ז"א מספיק להוכיח את הטענה עבור $G_0$.

ידוע שקיימים $\alpha,\beta \in S_n$ כך ש $<\alpha,\beta>=S_n$ . לכן קיים אפימורפיזם

$f:F(a,b)\to S_n$ . מכאן קיים גם אפימורפיזם $X:=f^{-1}(G_0)\to G_0$ . לפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל $X/H\cong G_0$ .

(החלק השני)

אם $G$ חבורת מנה של $F(a,b)$ אז קיים אפימורפיזם $h:F(a,b)\to G$ . אזי $<h(a),h(b)>=G$ . נקבל $rank(G)\le 2$ . כעת מספיק לקחת $G$ סופית עם $rank(G)>2$ . למשל $G:=\Omega_2^{\,3}$.