

תרגיל מספר 7 מבנים אלגבריים

1 בינואר 2017

1. יהא R חוג. הוכח את הבאים:

(א) לכל $a \in R$ מתקיים $-(-a) = a$

(ב) לכל $a, b \in R$ מתקיים $-(a + b) = -a - b$

(ג) לכל $a, b \in R$ מתקיים $a(-b) = -(ab) = (-a)b$

(ד) לכל $a, b \in R$ מתקיים $(-a)(-b) = ab$

(ה) לכל $a \in R$ מתקיים $(-a)^2 = a^2$

2. יהיו R_1, R_2 שני חוגים. נגדיר את חוג המכפלה להיות הקבוצה $R_1 \times R_2$ עם חיבור וכפל רכיב רכיב כלומר

$$\forall (a, b), (x, y) \in R_1 \times R_2 : (a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$$

$$\forall (a, b), (x, y) \in R_1 \times R_2 : (a, b)(x, y) = (ax, by)$$

כאשר $a + x$ זהו חיבור של R_1 , $b + y$ זהו חיבור של R_2 . באופן דומה הכפלים המצוינים בשאלה מתייחסים לכפלים של R_1, R_2 לפי ההקשר. עובדה: זה אכן חוג. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם R_1, R_2 חוגים עם חילוק אז גם $R_1 \times R_2$

(ב) אם R_1, R_2 חוגים עם יחידה אז גם $R_1 \times R_2$

3. הוכיחו כי הבאים הם חוגים. קבעו האם אלו חוגים חילופיים, האם אלו חוגים עם יחידה והאם חוגים אלו עם חילוק.

(א) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ עם חיבור וכפל של מספרים שלמים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים הממשיים \mathbb{R})

(ב) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ עם חיבור וכפל של מספרים שלמים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים הממשיים \mathbb{R})

(ג) הקבוצה $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ עם כפל וחיבור מטריצות.

(ד) קבוצת הפונקציות מהממשיים לממשיים $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ is function}\}$ עם חיבור פונקציות $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ וכפל מטריצות המוגדר כמכפלה $(fg)(x) = f(x)g(x)$

(ה) הקבוצה $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^{2 \times 2}$ עם חיבור וכפל מטריצות.