פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 14: משפט השארית

1. (א) הוכיחו: $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz = 0$ כאשר C_R חצי המעגל העליון $C_R=\{z:|z|=R,\Im(z)\geq 0\}$, a ממשי חיובי ו $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$.
יש להראות כי $\left|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz\right|<\epsilon$ לכל $|z|=R>R_0(\epsilon)$.
נרשום $z=Re^{i\phi}$ ונקבל

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz\right| \leq \int_{C_R}\left|f(z)e^{iaz}dz\right| = \int_0^\pi \left|f(Re^{i\phi})\right| e^{iaR(\cos\phi+i\sin\phi)}\left|iRe^{i\phi}\right|d\phi =$$

$$= R\int_0^\pi \left|f(Re^{i\phi})\right| e^{-aR\sin\phi}d\phi = 2R\int_0^{\pi/2}\left|f(Re^{i\phi})\right| e^{-aR\sin\phi}d\phi$$

$$\leq 2R\int_0^{\pi/2}\left|f(Re^{i\phi})\right| e^{-2aR\phi/\pi}d\phi,$$

כאשר באי השוויון האחרון השתמשנו בכך שהפונקציה $\sin\phi/\phi$ מונו-טונית יורדת ב $[0,\frac{\pi}{2}]$ ולכן $\sin\phi\geq\frac{2}{\pi}\phi$ בקטע.
כעת, לכל $|z|=R>R_0(\epsilon)$ מתקיים $|f(z)|<\epsilon a/\pi$. לכן

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz\right| \leq \frac{2R\epsilon a}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-2aR\phi/\pi}d\phi = \epsilon(1-e^{-aR})<\epsilon$$

וסיימנו.

(ב) הוכיחו כי

$$\int_\Gamma \frac{e^{iaz}dz}{\prod_k(z^2-z_k^2)} = 2\pi a\sum_j \frac{(-1)^n}{\prod_{k\neq j}(z_k^2-z_j^2)}\frac{\sin az_j}{az_j}, \tag{1}$$

כאשר $\pm z_k,\ k=1,2,...,n$ קטבים פשוטים על הציר הממשי ו Γ מסלול סגור העוקף קטבים אלו.

$$\int_\Gamma \frac{e^{iaz}dz}{\prod_k(z^2-z_k^2)} = 2\pi i\sum_j \mathrm{res}(f,z_j) = 2\pi i\sum_j \frac{1}{\prod_{k\neq j}(z_j^2-z_k^2)}\left(\frac{e^{iaz_j}}{2z_j}-\frac{e^{-iaz_j}}{2z_j}\right) =$$

$$= 2\pi\sum_j \frac{(-1)^n}{\prod_{k\neq j}(z_k^2-z_j^2)}\left(\frac{e^{iaz_j}-e^{-iaz_j}}{2iz_j}\right) = 2\pi a\sum_j \frac{(-1)^n}{\prod_{k\neq j}(z_k^2-z_j^2)}\frac{\sin az_j}{az_j}.$$

(ג) הסיקו כי
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{b^2-x^2}dx = \frac{\pi \sin ab}{b}$$

נבנה מסלול סגור Γ המורכב מחצי המעגל העליון C_R, חצאי המעגלים $\gamma_{-1} = \{z : |z+1| = r, \Im(z) \leq 0\}$ ו $\gamma_1 = \{z : |z-1| = r, \Im(z) \leq 0\}$ העוקפים את הקטבים מלמטה, וקטעים על הציר הממשי המחברים ביניהם. נבחר $f(z) = 1/(z^2-b^2)$. אזי

$$\int_\Gamma e^{iaz} f(z)dz = \int_{-R}^{-1-r} e^{iax} f(x)dx + \int_{\gamma_{-1}} e^{iaz} f(z)dz +$$

$$+\int_{-1+r}^{1-r} e^{iax} f(x)dx + \int_{\gamma_1} e^{iaz} f(z)dz + \int_{1+r}^{R} e^{iax} f(x)dx + \int_{C_R} e^{iaz} f(z)dz.$$

נתבונן בשני חצאי המעגלים γ_1, γ_{-1}. נסגור כל אחר מהם למעגל ונקבל

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{iaz}dz}{(z^2-b^2)} = \frac{1}{2} 2\pi i \frac{e^{iab}}{2b} = -\pi \frac{e^{iab}}{2ib},$$

$$\int_{\gamma_{-1}} \frac{e^{iaz}dz}{(z^2-b^2)} = \frac{1}{2} 2\pi i \frac{e^{-iab}}{-2b} = \pi \frac{e^{iab}}{2ib},$$

ובסה"כ

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{iaz}dz}{(z^2-b^2)} + \int_{\gamma_{-1}} \frac{e^{iaz}dz}{(z^2-b^2)} = -\pi \frac{\sin ab}{b}.$$

ברור כי $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ ולכן לפי (1) ובגבול $R \to \infty, r \to 0$ נקבל

$$\int_\Gamma \frac{e^{iaz}dz}{z^2-b^2} = -2\pi \frac{\sin ab}{b} = \int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2-b^2}dx - \pi \frac{\sin ab}{b}$$

ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{b^2-x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{b^2-x^2}dx = \frac{\pi \sin ab}{b}.$$