פונקציות מרוכבות – תרגול 4

בפעם הקודמת אמרנו שהפונקציה $f(z)=z^2$ גזירה בכל מקום, אבל לא אמרנו מהי הנגזרת. ובכן $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z_0+\Delta z)^2-{z_0}^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z_0+\Delta z)=2z_0$ כצפוי.

תזכורת: בהרצאה הוגדר הלוגריתם $\log(z):=\ln|z|+i\arg z$ והענף הראשי $Log(z):=\ln|z|+iArg(z)$

הגדרה: יהיו $z\neq 0, w\in\mathbb{C}$, החזקה z^w מוגדרת ע"י $z^w=\left(e^{\log z}\right)^w:=e^{w\log z}$ תתכן יותר מתוצאה אחת.

תרגיל: חשבו:

א. 2^3

ב. $(-1)^2$

ג. $(-9)^{1/2}$

ד. i^i

פתרון:

א. $\log(2)=\ln|2|+i\arg(2)=\ln(2)+2\pi ik$ ולכן $2^3=e^{3(\ln(2)+2\pi ik)}=e^{\ln(8)}e^{6\pi ik}=8$

ב. $\log(-1)=\ln|-1|+i\arg(-1)=i(\pi+2\pi k)$ ומכאן $(-1)^2=e^{2(1+2k)\pi i}=1$

ג. $\log(-9)=\ln|-9|+i\arg(-9)=\ln 9+i(\pi+2\pi k)$ ומכאן
$(-9)^{1/2}=e^{\frac{1}{2}(\ln 9+i(\pi+2\pi k))}=e^{\ln 3}e^{i(\pi/2+\pi k)}=3,-3$

ד. $\log(i)=\ln|i|+i\arg(i)=i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ ומכאן $i^i=e^{i\left(i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$ יש אינסוף ערכים אפשריים, וכולם ממשיים!

תרגיל ממבחן: (מועד ב' תשס"ט)

1. מצאו את כל הערכים ב-$\mathbb{C}$ של $\left[\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5}\right]^{1/3}$

פתרון:

נפשט בפנים $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5=i^5=i$. וכבר ראינו $\log(i)=i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ כך ש

$$\left[\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5}\right]^{1/3}=e^{1/3\log\left(\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5}\right)}=e^{1/3\log(i)}=e^{1/3\left(i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)}=e^{i\pi/6}e^{2\pi ki/3}=e^{i\pi/6},e^{i5\pi/6},e^{i9\pi/6}$$

הגדרה: הפונקציות הטריגונומטריות מוגדרות ע"י

$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$. (נראה כמו חלק ממשי ומדומה אבל זה לא נכון!)

תרגיל: מצא היכן סינוס מתאפסת.

פתרון: ידוע מאינפי/תיכון שסינוס מתאפס במספרים הממשיים πk. מי אמר שאין עוד פתרונות מרוכבים?

אם $\sin z=0$ אז $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0$ $e^{iz}=e^{-iz},e^{2iz}=1$ נוציא לוג לקבל $2iz=2\pi ki\to z=\pi k$.

כלומר אין עוד פתרונות חוץ מהמוכרים.

תרגיל: פתור $\sin z=2$.

פתרון: בממשיים אין סיכוי.

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2,e^{iz}-e^{-iz}=4i,\left(e^{iz}\right)^2-4i\left(e^{iz}\right)-1=0,e^{iz}=\frac{4i\pm\sqrt{-16+4}}{2}=\frac{4i\pm2\sqrt{3}i}{2}=2i\pm\sqrt{3}i=\left(2\pm\sqrt{3}\right)i$$

$iz=\log\left|\left(2\pm\sqrt{3}\right)i\right|+i\arg\left[\left(2\pm\sqrt{3}\right)i\right]$ בחירה בסימן פלוס נותנת

$z=\frac{\pi}{2}-i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+2\pi k$ ובחירה בסימן מינוס נותנת $z=\frac{3\pi}{2}-i\ln\left(\sqrt{3}-2\right)+2\pi k$.

תרגיל: נניח כי $\sin z=\sin w$ הוכיחו כי $z=w+2\pi k$ או $z=\pi-w+2\pi k$.

לפני הפתרון נוכיח טענת עזר: אם $z+\frac{1}{z}=w+\frac{1}{w}$ אזי $z=w$ או $zw=-1$.

הוכחת הטענה

$$\frac{z^2-1}{z}=\frac{w^2-1}{w},z^2w-w=zw^2-z,z^2w-zw^2+z-w=0,(z-w)(zw+1)=0$$.

בחזרה לתרגיל: $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i},e^{iz}-\frac{1}{e^{iz}}=e^{iw}-\frac{1}{e^{iw}}$ ע"פ הטענה $e^{iz}=e^{iw}$ או $e^{i(z+w)}=-1$. המקרה הראשון נותן $iz=iw+2\pi ki\to z=w+2\pi k$ והמקרה השני נותן $i(z+w)=i\pi+2\pi ki,z=\pi-w+2\pi k$.

תרגיל: פתרו את המשוואה $\cos w=z$ (בעצם מצאו נוסחה עבור $w=\arccos z$)

פתרון:

$$\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}=z, e^{iw}+e^{-iw}=2z, \left(e^{iw}\right)^2-2z\left(e^{iw}\right)+1=0, e^{iw}=\frac{2z\pm\sqrt{4z^2-4}}{2}=z\pm\sqrt{z^2-1}$$

כלומר $iz=\log\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\right), z=\frac{1}{i}\log\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\right)$

תרגיל: הוכיחו את הזהות $\sin 2z=2\sin z\cos z$

פתרון: $2\sin z\cos z=2\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)=\frac{e^{2iz}-e^{-2iz}}{2i}=\sin\left(2z\right)$

הגדרה: הפונקציות ההיפרבוליות,

$\cosh\left(z\right)=\frac{e^z+e^{-z}}{2}, \sinh\left(z\right)=\frac{e^z-e^{-z}}{2}, \tanh\left(z\right)=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$.

יש קשרים נחמדים: $\cosh(iz)=\cos(z), \sinh(iz)=i\sin(z)$.

[אם יש זמן – להראות גרפים]

תרגיל: הוכיחו את הזהות $\sinh 2z=2\sinh z\cosh z$.

פתרון: כמעט אותה הוכחה.

למעשה יש לנו את "כלל אוסבורן": כל נוסחה עם הפונקציות הטריגונומטריות ניתן להמיר לנוסחה עם הפונקציות ההיפרבליות ע"פ הכלל הבא: כל כפל בין שני סינוסים נותן מינוס בנוסחה החדשה.

למשל $\cos^2 z+\sin^2 z=1$ אבל $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$.

[בשארית הזמן אפתור תרגילים משנה שעברה באתר math-wiki]