פתרון תרגיל 3

1. חשבו את $2A+3B-C$ עבור המטריצות
$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1/3\\2&0\\1&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&2\\6&5\\8&-1\end{pmatrix}.$$
פתרון: $\begin{pmatrix}2&3\\6&3\\5&10\end{pmatrix}$.

2. פתרו את המשוואה עבור X:
$$2A-X=3B$$
בהינתן המטריצות:
$$A=\begin{pmatrix}3&4&10\\-1&2&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&3\end{pmatrix}.$$
פתרון: נעביר אגפים $X=2A-3B=\begin{pmatrix}3&2&11\\-2&7&-9\end{pmatrix}$

3. חשבו את:

(א) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&0\\1/2&-1&0\\1/2&0&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&7\end{pmatrix}$

(ב) $\begin{pmatrix}1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5\end{pmatrix}$

(ג) $\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1/2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(ד) $\begin{pmatrix}1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=0$

4. מצאו שתי מטריצות ריבועיות A,B מגודל 2×2 המקיימות
$$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$$

פתרון: נקח למשל את $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

אז $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

אבל $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. פתרו את המשוואה הבאה עבור X: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

פתרון:

ננסה למצוא הופכי ל $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ננסה לפתור

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וזה נותן שהמטריצה ההופכית היא $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (כן, כן, המטריצה היא ההופכית של עצמה.)

נכפול את שני האגפים של המשוואה בהופכי מצד שמאל

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. ידוע ש $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

פתרו את המערכת הבאה (לא בשיטה של גאוס)

$$\begin{cases} 2x + y &= 3 \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

פתרון:.

נכניס את המערכת למטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נכפול בהופכי מצד שמאל ונקבל : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

אלגברה לינארית, תשע"ו - תרגיל 6 פתור

1. האם התתי־קבוצות של המרחבים הוקטורים המצויינים הן תתי־מרחבים? אם כן־ הוכיחו. אם לא־ נמקו או תנו דוגמא נגדית.

(א) $\left\{\begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}\subseteq\mathbb{R}^4$.

זהו ת"מ וקטורי.

סגירות לחיבור: $\begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a'+b' \\ b' \\ a' \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a+a')+(b+b') \\ b+b' \\ a+a' \\ 0 \end{pmatrix}$

סגירות לכפל בסקלר: $c\cdot\begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ca+cb \\ cb \\ ca \\ 0 \end{pmatrix}$

(ב) $\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a+b+c=0\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

זהו ת"מ וקטורי.

סגירות לחיבור: נקח שני וקטורים $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\in V$, מכיוון שהם ב$V$ אז $a+b+c=0$ וגם $a'+b'+c'=0$.
מתקיים ש $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}\in V$ כי סכום האיברים הוא $(a+b+c)+(a'+b'+c')=0+0=0$.

סגירות לכפל בסקלר: ניקח $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\in V$ כלומר ש $a+b+c=0$. ונקח סקלר k. אזי: $k\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}\in V$ כי סכום האיברים הוא $ka+kb+kc=$

$k(a+b+c)=0$.

(ג) $\mathbb{R}^3 \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a \geq 0 \right\}$.

זהו לא ת"מ וקטורי! שימו לב שהוא כן סגור לחיבור, אבל הוא לא סגור לכפל בסקלר שכן למשל $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ אבל $(-1)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin V$.

$\mathbb{R}^3 \supseteq \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$.

זהו ת"מ וקטורי.

סגירות לחיבור:

$$\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) + \left(\alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = (\alpha+\alpha') \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (\beta+\beta') \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V.$$

סגירות לכפל בסקלר:

$$k\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = (k\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (k\beta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V.$$

2. יהי $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. (פעולות רגילות של חיבור מטריצות וכפל בסקלר). הוכיחו כי הקבוצות הבאות הם תתי מרחבים של V:
א. מטריצות סימטריות.
ב. מטריצות אלכסוניות.
ג. מטריצות משולשית עליונה.

פתרון:

נבדוק את התנאים לתת מרחב עבור כל אחת מהקבוצות (נשתמש בקריטריון המקוצר):
א. מטריצת האפס היא סימטרית ולכן 0 בתת המרחב. יהי A,B מטריצות סימטריות ו־$\alpha\in\mathbb{F}$ נוכיח כי $\alpha A+B$ סימטרית, $(\alpha A+B)_{ij}=\alpha(A)_{ij}+(B)_{ij}=\alpha(A)_{ji}+(B)_{ji}=(\alpha A+B)_{ji}$ ולכן $(\alpha A+B)$ גם כן סימטרית ונמצאת בתת מרחב.
ב. מטריצת האפס היא אלכסונית ולכן נמצאת בתת מרחב. יהיו A,B מטריצות סימטריות $\alpha\in\mathbb{F}$ נוכיח כי $\alpha A+B$ אלכסונית, $(\alpha A+B)_{ij}=\alpha(A)_{ij}+(B)_{ij}$ ולכן $(\alpha A+B)_{ij}\neq 0 \Leftrightarrow i=j$ ולכן $(\alpha A+B)$ אלכסונית.
ג. מטריצת האפס היא אלכסונית ולכן נמצאת בתת מרחב. יהיו A,B מטריצות משולשית עליונה $\alpha\in\mathbb{F}$ נוכיח כי $\alpha A+B$ משולשית עליונה, $(\alpha A+B)_{ij}=\alpha(A)_{ij}+(B)_{ij}$ ולכן $(\alpha A+B)_{ij}\neq 0 \Leftrightarrow i<j$ ולכן $(\alpha A+B)$ משולשית

עליונה.

3. קבעו אם הקבוצות הבאות ת"ל או בת"ל:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ ב. $\left\{\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix}\right\}$ ג. $\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}\right\}$

פתרון:

עבור כל אחת מהקבוצות נבדוק האם קיים פתרון לא טריואלי למשוואה $a\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0$ נעבור למערכת המטריצאלית המתאימה $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$ ונבדוק ע"י דרוג מטריצות אם קיים פתרון לא טריוויאלי.

א. המטריצה המתאימה (אם נסדר את הוקטורים בקבוצה בסדר מעט שונה): $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ וכמובן שקיים רק פתרון טרויאלי. ולכן הקבוצה היא בת"ל.

ב. המטריצה המתאימה: $\begin{pmatrix}3&2&5\\4&2&6\\1&0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3&2&5\\4&2&6\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\4&2&6\\3&2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

יש שורת אפסים ולכן קיימים אינסוף פתרונות ובפרט קיים פתרון לא טריויאלי. ולכן הקבוצה היא ת"ל.

ג. המטריצה המתאימה: $\begin{pmatrix}2&0&0\\4&2&4\\1&1&2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\4&2&4\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\4&2&4\\2&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-2&-4\\0&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-2&-4\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

יש שורת אפסים ולכן קיימים אינסוף פתרונות ובפרט קיים פתרון לא טריויאלי. ולכן הקבוצה היא ת"ל.

דוגמה לפתרון הוא $c=t, b=-2t, a=0$ והצרוף יראה כך:

$$0\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}+-2t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}=0$$