

כל הזכויות שמורות
זהבית צבי

פתרון תרגיל בית 9 פונקציות מרוכבות למתמטיקה – נקודות סינגולריות, טור לורן

שאלה 1

תהי z_0 סינגולריות עיקרית של $f(z)$. הוכיחו כי לכל N טבעי ולכל M ממשי קימת סדרה $z_n \rightarrow z_0$ כך ש- $|f(z_n)| \geq M$.

הוכחה

יהי N טבעי ו- M ממשי. נגדיר $g(z) = (z - z_0)^N f(z)$. נניח בשלילה שיש סביבה מנוקבת U של z_0 שבה מתקיים $|g(z)| < M$, כלומר $g(z)$ חסומה בסביבה U .

לפי טענה בדף סיכום, מכיוון שהפונקציה $g(z)$ חסומה סביב z_0 , יש לה סינגולריות סליקה ב- z_0 . נבודד את $f(z)$ ונקבל: $f(z) = (z - z_0)^{-N} g(z)$. לכן $f(z)$ בעלת קוטב (מסדר לכל היותר N) ב- z_0 וזאת בסתירה לכך ש- z_0 היא סינגולריות עיקרית של $f(z)$. לכן לא קימת סביבה מנוקבת של z_0 שבה מתקיים $|g(z)| < M$.

לכן אפשר ליצר סדרה $z_n \rightarrow z_0$ שעבורה $|g(z_n)| \geq M$ באופן הבא:

בעיגול ברדיוס 1 סביב z_0 יש נקודה z_1 כך ש- $|g(z_1)| \geq M$ ובאופן כללי בעיגול ברדיוס $\frac{1}{n}$ סביב z_0 יש נקודה z_n כך ש- $|g(z_n)| \geq M$ וכו'. מש"ל.

שאלה 2

נניח $f(z)$ אנליטית בטבעת מהסוג $0 < |z| < R$ עבור $R > 0$.

א. האם יתכן שטור לורן של $f(z)$ בטבעת זו מכיל רק חזקות חיוביות ($n \geq 0$) וטור לורן של $\frac{1}{f(z)}$ באותה הטבעת מכיל רק חזקות שליליות ($n \leq 0$)? נמקו את תשובתכם.

ב. האם יתכן שטור לורן של $f(z)$ בטבעת זו מכיל רק חזקות חיוביות ($n \geq 0$) וטור לורן של $\frac{1}{f(z)}$ באותה הטבעת מכיל ∞ חזקות שליליות? נמקו.

פתרון

א. כן, זה יתכן. לדוגמא, טור לורן של $f(z) = z$ מכיל רק חזקות חיוביות (בעצם רק חזקה אחת), וטור לורן של $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z}$ מכיל רק חזקות שליליות (חזקה שלילית אחת).

כל הזכויות שמורות
זהבית צבי

ב. זה לא יתכן. אם ל- $f(z)$ יש רק חזקות חיוביות אז היא אנליטית או שהסינגולריות שלה בנקודה 0 היא סליקה, ואז הגבול $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ קיים וסופי, שלומר שווה למספר מרוכב כלשהו. כעת, אם $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) \neq 0$ אז $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(z)}$ גם מספר סופי, ואם $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$ אז $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(z)} = \infty$, כלומר $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(z)}$ קיים במובן הרחב, כמספר סופי או אינסוף, לכן $z = 0$ אינה סינגולרית עיקרית אז בטור לורן אין אינסוף חזקות שליליות.

שאלה 3

נניח כי הפונקציות $f(z), g(z), r(z), h(z)$ אנליטיות בסביבה מנוקבת של $z_0 \in \mathbb{C}$. עוד נניח כי ל- f קוטב מסדר 2 ב- z_0 , ל- g אפס מסדר 3 ב- z_0 , ל- r אפס מסדר 2 ול- h אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות של

א. $\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$

ב. $\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}$

בנקודה z_0 ?

פתרון

לפי הנתונים בשאלה והגדרת סדר אפס וסדר קוטב, קימות פונקציות אנליטיות h, f, g ו- \tilde{r} אין מתאפסות ב- z_0 כך ש-

$f(z) = (z - z_0)^{-2} \tilde{f}(z), g(z) = (z - z_0)^3 \tilde{g}(z), r(z) = (z - z_0)^2 \tilde{r}(z), h(z) = (z - z_0) \tilde{h}(z)$
א. נציב את כל אלה לתוך הפונק' $\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$ ונקבל:

$$\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)} = \frac{(z - z_0)^{-2} \tilde{f}(z) \cdot (z - z_0)^3 \tilde{g}(z)}{(z - z_0)^2 \tilde{r}(z) + (z - z_0) \tilde{h}(z)} = \frac{\cancel{(z - z_0)} \tilde{f}(z) \tilde{g}(z)}{\cancel{(z - z_0)} [(z - z_0) \tilde{r}(z) + \tilde{h}(z)]}$$

קיבלנו מנה של פונקציות אנליטיות עם מכנה לא מתאפס בנקודה z_0 לכן לפונקציה

יש סינגולריות סליקה ב- z_0 . $\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$

ב. נציב את כל אלה לתוך הפונק' $\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}$ ונקבל:

כל הזכויות שמורות
זהבית צבי

$$\frac{f(z) + g(z)}{r(z) + h(z)} = \frac{(z - z_0)^{-2} f(z) + (z - z_0)^3 g(z)}{(z - z_0)^2 \tilde{r}(z) + (z - z_0) h(z)} = \frac{(z - z_0)^{-2} [f(z) + (z - z_0)^5 g(z)]}{(z - z_0) [(z - z_0) \tilde{r}(z) + h(z)]}$$

$$= (z - z_0)^{-3} \frac{f(z) + (z - z_0)^5 g(z)}{(z - z_0) \tilde{r}(z) + h(z)}$$

לכן לפי הגדרה של סדר קוטב מקבלים שלפונקציה $\frac{f(z) + g(z)}{r(z) + h(z)}$ יש קוטב מסדר 3 ב- z_0 .

שאלה 4

פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}$ לטור לורן בטבעת הנתונה:

א. $|z-2| > 2$ (זהו חוץ עיגול סביב $z_0 = 2$ ברדיוס 2).

ב. $0 < |z-2| < 2$ (זהו עיגול נקוב סביב $z_0 = 2$ ברדיוס 2, ללא הנקודה z_0 עצמה).

פתרון

א. נפתח את $\frac{1}{z^2}$ סביב $z_0 = 2$:

נשתמש בפיתוח הנדסי בטבעת $|z-2| > 2$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-2+2} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{z-2}} = \frac{1}{z-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n (z-2)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n (z-2)^{-n-1}$$

נגזור לקבל:

$$-\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} -(n+1)(-2)^n (z-2)^{-n-2}$$

נכפול במינוס ובאיבר הנתון בטור $\frac{1}{z-2}$ ונקבל:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-2)^n (z-2)^{-n-3}$$

ניתן לראות שהפיתוח הוא בתחום $|z-2| > 2$ לפי תחום התכנסות של הטור ההנדסי.

ב. נשתמש בפיתוח הנדסי בטבעת $0 < |z-2| < 2$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-2+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-2}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^n$$

כל הזכויות שמורות
זהבית צבי

נגזור לקבל:

$$-\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^{n-1}$$

נכפול במינוס ובאיבר הנתון בטור $\frac{1}{z-2}$ ונקבל:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-2)^{n-2}$$

אנו רואים שאכן זה תחום ההתכנסות $|z-2| < 2$ לפי תחום התכנסות של הטור ההנדסי שהשתמשנו בו. והוא אותו התחום גם בטור הגזור.

התחום הכולל הוא $0 < |z-2| < 2$ (עיגול נקוב) מכיוון שבטור שקיבלנו כפלנו ב- $\frac{1}{z-2}$ שלא מוגדר ב- $z=2$.

שאלה 5

פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ לטור לורן המתכנס בתחומים הבאים:

- א. (i) $1 < |z| < 2$
(ii) $|z| > 2$

- ב. (i) $0 < |z+1| < 3$
(ii) $|z+1| > 3$

(הופיעה בקובץ תרגול 11, שאלה מהטכניון עם תוספות)

פתרון

הערה: כאן בגלל המונה z^3 לא ניתן לכתוב ישירות כסכום של מחוברים, אלא לאחר פירוק לשברים של $\frac{1}{(z+1)(z-2)}$ והפיתוח המתאים לטור, כופלים ב- z^3 .

א. נרשום את הפונקציה בצורה הבאה:

$$f(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-2)} = z^3 \cdot \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

כעת נפרק את $\frac{1}{(z+1)(z-2)}$ לשברים חלקים:

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2} = \frac{A(z-2) + B(z+1)}{(z+1)(z-2)}$$

המכנה זהה, נשווה מונים לכל z ונקבל:

$$1 = A(z-2) + B(z+1) = (A+B)z - 2A + B$$

כל הזכויות שמורות
זהבית צבי

נשווה מקדמים ונקבל:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow 3A = -1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}, B = \frac{1}{3}$$

לכן הפירוק הוא:

$$(*) \frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\underbrace{z+1}_{(I)}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\underbrace{z-2}_{(II)}}$$

נשתמש בפיתוחים לטור הנדסי:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, |z| < 1$$

(i) אנו רוצים שהטור כולו יתכנס בטבעת $1 < |z| < 2$, כלומר גם בעיגול

$|z| < 2$ וגם בחוץ עיגול $|z| < 1$, לכן ניקח מחובר אחד של (*) ונפתח אותו לטור בעיגול $|z| < 2$ ומחובר אחר נפתח לטור בחוץ עיגול $|z| < 1$.

נפתח את המחובר (I) בחוץ עיגול $|z| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{z} \right| < 1$:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z \left(1 + \frac{1}{z} \right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z}}$$

נציב $\frac{1}{z}$ במקום z בפיתוח $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ ונקבל:

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z} \right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

לכן

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

מתכנס כאשר $\left| \frac{1}{z} \right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$

נפתח את המחובר (II) בעיגול $|z| < 2$:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2 \left(1 - \frac{z}{2} \right)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}}$$

נציב $\frac{z}{2}$ במקום z בפיתוח $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ונקבל:

כל הזכויות שמורות
זהבית צבי

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

מתכנס כאשר $|z| < 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z}{2}\right| < 1$.

נציב טורים אלו ב- (*) ונקבל:

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} + \frac{z^n}{2^{n+1}}\right)$$

פיתוח זה מתכנס בטבעת $1 < |z| < 2$.

הערה: אי אפשר לפתח את המחובר (II) בחוץ עיגול $|z| > 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1$, כיוון שנתקל בנק' סינגולרית $z = 2$ שנמצאת בתחום זה. לכן יש לפתח מחובר זה בתחום

$$|z| < 2$$

נכפול ב- z^3 ונקבל תשובה סופית:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^3}{(z+1)(z-2)} = z^3 \cdot -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} + \frac{z^n}{2^{n+1}}\right) \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{z^{n-2}} + \frac{z^{n+3}}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

מתכנס בטבעת $1 < |z| < 2$.

(ii) כעת רוצים שהטור כולו יתכנס בחוץ עיגול $|z| > 2$.

מצאנו בתת סעיף (i) פיתוח של המחובר (I) בחוץ עיגול $|z| > 1$, שהוא תחום חלקי לחוץ עיגול המבוקש $|z| > 2$ וקיבלנו:

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

כעת נפתח את המחובר (II) בחוץ עיגול $|z| > 2$:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\left(1 - \frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}}$$

נציב $\frac{2}{z}$ במקום z בפיתוח $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ונקבל:

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$$

כל הזכויות שמורות
זהבית צבי

$$|z| > 2 \Leftrightarrow \left| \frac{2}{z} \right| < 1$$

נציב טורים אלו ב- (*) ונקבל:

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 2^n}{z^{n+1}}$$

פיתוח זה מתכנס בחוץ עיגול $|z| > 2$.

נכפול ב- z^3 ונקבל תשובה סופית:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^3}{(z+1)(z-2)} = z^3 \cdot -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 2^n}{z^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 2^n}{z^{n-2}} \end{aligned}$$

מתכנס בחוץ עיגול $|z| > 2$.

ב. כאן נרצה לקבל טור בחזקות של $z+1$, כלומר טור סביב הנקודה $z = -1$. כיוון שבפונקציה $f(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה, תחילה נבצע חילוק פולינומים (חילוק ארוך) באופן הבא:

$$\begin{aligned} \frac{z^3}{(z+1)(z-2)} &= \frac{z^3}{z^2 - z - 2} \\ &= \frac{(z^3 - z^2 - 2z) + z^2 + 2z}{z^2 - z - 2} = \frac{z(z^2 - z - 2) + z^2 + 2z}{z^2 - z - 2} \\ &= z + \frac{z^2 + 2z}{z^2 - z - 2} = z + \frac{(z^2 - z - 2) + 3z + 2}{z^2 - z - 2} \\ &= z + 1 + \frac{3z + 2}{z^2 - z - 2} = z + 1 + \frac{3z + 2}{(z+1)(z-2)} \end{aligned}$$

קיבלנו:

$$(**) f(z) = z + 1 + \frac{3z + 2}{(z+1)(z-2)}$$

נפתח את $\frac{3z+2}{(z+1)(z-2)}$ לשברים חלקיים:

$$\frac{3z + 2}{(z+1)(z-2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2} = \frac{A(z-2) + B(z+1)}{(z+1)(z-2)}$$

המכנה זהה, נשווה מונים לכל z ונקבל:

$$3z + 2 = A(z-2) + B(z+1) = (A+B)z - 2A + B$$

נשווה מקדמים ונקבל:

כל הזכויות שמורות
זהבית צבי

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ -2A + B = 2 \end{cases} \Rightarrow 3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = \frac{8}{3}$$

לכן הפירוק הוא:

$$(***) \frac{3z + 2}{(z + 1)(z - 2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\underbrace{z + 1}_{(I)}} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{\underbrace{z - 2}_{(II)}}$$

כיוון שאנו רוצים טור בחזקות של $z + 1$, נשים לב כי המחובר (I) הוא כבר חזקה כזאת: $\frac{1}{z + 1} = (z + 1)^{-1}$, והוא בסה"כ איבר אחד, כלומר סופי, ולכן מתכנס (מוגדר) לכל $z \neq -1$ $\Leftrightarrow |z + 1| > 0$.

נותר לפתח את המחובר (II) לטור בתחום המתאים.

(i) אנו רוצים שהטור כולו יתכנס בטבעת $0 < |z + 1| < 3$, שהיא עיגול נקוב סביב הנקודה $z = -1$ ברדיוס 3.

נפתח את המחובר (II) בעיגול $|z + 1| < 3 \Leftrightarrow \left| \frac{z + 1}{3} \right| < 1$.

לצורך כך נעשה הזזה במכנה: $z - 2 = (z + 1) - 3$ ונקבל

$$\frac{1}{z - 2} = \frac{1}{(z + 1) - 3} = \frac{1}{3 \left(\frac{z + 1}{3} - 1 \right)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z + 1}{3}}$$

נציב $\frac{z + 1}{3}$ במקום z בפיתוח ההנדסי $\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ונקבל:

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z + 1}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z + 1}{3} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 1)^n}{3^{n+1}}$$

לכן,

$$\frac{1}{z - 2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 1)^n}{3^{n+1}}$$

מתכנס כאשר $|z + 1| < 3 \Leftrightarrow \left| \frac{z + 1}{3} \right| < 1$.

נציב ב-(***) ונקבל:

$$\frac{3z + 2}{(z + 1)(z - 2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z + 1} + \frac{8}{3} \cdot \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 1)^n}{3^{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z + 1} - \frac{8}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 1)^n}{3^{n+1}}$$

כל הזכויות שמורות
זהבית צבי

פיתוח זה מתכנס כאשר $|z + 1| > 0$ וגם $|z + 1| < 3$, כלומר בטבעת

$$0 < |z + 1| < 3$$

נציב ב-(**) ונקבל תשובה סופית:

$$f(z) = z + 1 + \frac{3z + 2}{(z + 1)(z - 2)} = (z + 1) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z + 1} - \frac{8}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 1)^n}{3^{n+1}}$$

מתכנס בטבעת $0 < |z + 1| < 3$.

(ii) כעת רוצים שהטור כולו יתכנס בחוץ עיגול $|z + 1| > 3$ סביב הנק' $z = -1$ ברדיוס 3.

$$\left| \frac{3}{z+1} \right| < 1 \Leftrightarrow |z + 1| > 3 \text{ בחוץ עיגול (II)}$$

לצורך כך נעשה הזזה במכנה: $z - 2 = (z + 1) - 3$ ונקבל

$$\frac{1}{z - 2} = \frac{1}{(z + 1) - 3} = \frac{1}{(z + 1) \left(1 - \frac{3}{z + 1}\right)} = \frac{1}{z + 1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{z + 1}}$$

נציב $\frac{3}{z+1}$ במקום z בפיתוח $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ונקבל:

$$\frac{1}{z + 1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{z + 1}} = \frac{1}{z + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z + 1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z + 1)^{n+1}}$$

$$|z + 1| > 3 \Leftrightarrow \left| \frac{3}{z+1} \right| < 1 \text{ מתכנס כאשר}$$

נציב ב-(***) ונקבל:

$$\frac{3z + 2}{(z + 1)(z - 2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z + 1} + \frac{8}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z + 1)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z + 1} + 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(z + 1)^{n+1}}$$

פיתוח זה מתכנס בחוץ עיגול $|z + 1| > 3$.

נציב ב-(**) ונקבל תשובה סופית:

$$f(z) = z + 1 + \frac{3z + 2}{(z + 1)(z - 2)} = (z + 1) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z + 1} + 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(z + 1)^{n+1}}$$

מתכנס בחוץ עיגול $|z + 1| > 3$.

כל הזכויות שמורות
זהבית צבי

שאלה 6

תהי z_0 נקודת סינגולריות עיקרית של $f(z)$. תהי $g(z)$ פונקציה שלמה ולא קבועה. הוכיחו כי z_0 היא גם סינגולריות עיקרית של ההרכבה $g \circ f$.

פתרון

נתון כי $g(z)$ אינה פונקציה קבועה, לכן קיימים $a \neq b \in \mathbb{C}$ כך ש-

$$g(a) \neq g(b)$$

בנוסף נתון כי z_0 היא נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$, לכן $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ לא קיים. מהגדרת הגבול לפי הינה נקבל שקיימות שתי סדרות $\{a_n\}, \{b_n\}$ המתכנסות לנקודה z_0 ,

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0, b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$$

כך ש-

$$f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, f(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$$

כעת נתון כי g שלמה, בפרט היא רציפה ב- z_0 , לכן מתקיים

$$g(f(a_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(a), g(f(b_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(b)$$

ראינו כי $g(a) \neq g(b)$ ולכן הגבול $\lim_{z \rightarrow z_0} g(f(z))$ אינו קיים, כלומר z_0 היא סינגולריות עיקרית של ההרכבה $g \circ f$.