

לינארית 2- תרגיל 12

2 ביוני 2015

1. הוכח: A הפיכה $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

פתרון: נניח $\det A = 0$. נניח בשלילה ש A הפיכה. אזי, קיימת B כך ש: $AB = I$.
נקבל ש: $\det(A)\det(B) = 1$, כלומר, $\det(B) = 1$, וזאת סתירה.

כעת, נניח ש $\det(A) \neq 0$. ידוע שלכל מטריצה קיימת המטרצה המצורפת, כך ש:
 $A \left(\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \right) = I$. מכיוון ש $\det(A) \neq 0$, ניתן לחלק בו ולקבל: $A \left(\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \right) = I$.

כלומר, מצאנו מטריצה הופכית ל A .

2. הוכח/הפרד:

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B) \text{ א.}$$

הפרכה: נקח: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\det(A) = \det(B) = 0$.

$$\det(A+B) = 1$$

ב. למטריצות דומות יש אותה דטרמיננטה.

הוכחה: נניח A, B דומות. כלומר, קיימת P הפיכה כך ש: $P^{-1}AP = B$.
 $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P|^{-1}|A||P| = |A|$
הדטרמיננטה.

3. חשב את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & -5 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 0 \\ 6 & 10 & 2 \end{pmatrix} & \text{א.} \\ & & \text{ב.} \end{array}$$

פתרון: א. 404 ב. 28

ניתן למשל לחשב את א' לפי הנוסחא של האלכסונים למטריצה 3×3 , ואת ב' לפי דירוג לצורה משולשית, ע"י פעולות של חיסור כפולת שורה משורה אחרת, שלא משנות את הדטרמיננטה.

4. חשב את ההופכית של המטריצה מ3 א', בעזרת *adjoint*.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{404} \begin{pmatrix} 6 & 80 & -27 \\ -14 & -52 & 63 \\ 52 & 20 & -32 \end{pmatrix} \text{ פתרון:}$$

5. מהם שני הערכים האפשריים לדטרמיננטה של מטריצה אוניטרית ממשית?
רמז: היזכר מה ידוע על הקשר שבין ע"ע לדטרמיננטה, וכן מה ידוע על ע"ע של מטריצה אוניטרית.

פתרון: ידוע שהדטרמיננטה = מכפלת הערכים העצמיים. למדנו שלמטריצה אוניטרית, כל הע"ע הם מוחלט 1, ולכן גם המכפלה שלהם. כלומר, $|\det(A)| = 1$. למטריצה ממשית יש דטרמיננטה ממשית. המספרים הממשיים היחידים שהערך מוחלט שלהם הוא 1 הם: 1, -1. לכן אלו האפשרויות היחידות לדטרמיננטה של מטריצה אוניטרית.