אלגברה מופשטת 3 – תרגילי חזרה

שאלה 1

חשבו את שדות הפיצול של הפולינומים הבאים ומצאו קבוצת יוצרים לחבורת גלואה של ההרחבה.

1. $(x^4-8x^2+15)(x^2+1)$ מעל $\mathbb{Q}$
2. x^5-5 מעל $\mathbb{Q}[\rho_5+\rho_5^{-1}]$ באשר $\rho_5=\exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$.
3. x^6+27 מעל $\mathbb{Q}$.
4. x^6+27 מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.
5. x^4+1 מעל $\mathbb{Z}_3$.

שאלה 2

יהי $E\subseteq\mathbb{C}$ שדה פיצול של x^7-2 מעל $\mathbb{Q}$.

1. מהו $[E:\mathbb{Q}]$?
2. מצאו קבוצת יוצרים ל-$Gal(E/\mathbb{Q})$.
3. הוכיחו כי $E=\mathbb{Q}[\sqrt[7]{2}+\rho_7]$ באשר $\rho_7=\exp\left(\frac{2\pi i}{7}\right)$. (רמז: כמה צמודים יש ל-$\sqrt[7]{2}+\rho_7$?)
4. הראו כי קיים שדה $\mathbb{Q}\subseteq K\subseteq E$ כך ש-$[K:\mathbb{Q}]=14$.

שאלה 3

תהי $E/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה ממימד סופי של $\mathbb{Q}$ ויהי $\mathbb{Q}\subseteq L\subseteq E$ שדה. נסמן ב-n את מספר תתי השדות של $\mathbb{C}$ שאיזומורפיים ל-L. הוכיחו כי $n=|\{g^{-1}Gal(E/L)g \mid g\in Gal(E/\mathbb{Q})\}|$. מתי $n=1$?

שאלה 4

תהי E/F הרחבה ספרבילית ממימד סופי. הוכיחו כי יש רק מספר סופי של שדות בין F ו-E.

שאלה 5

פרקו את הפולינום $x^{27}-x$ מעל $\mathbb{Z}_3$. [הערה: חלוקת פולינומים אינה נחוצה כאן...]

שאלה 6

יהי E שדה הפיצול של x^8-x מעל $\mathbb{F}_4$, השדה עם 4 איברים. כמה איברים יש ב-E?

שאלה 7

הוכיחו כי ניתן לבנות בעזרת סרגל ומחוגה מצולע משוכלל בן n צלעות אם ורק אם $\varphi(\mathrm{n})$ הוא חזקת 2.

שאלה 8

1. מצאו את כל תתי השדות של $\mathbb{Q}[\rho_{17}]$ (באשר ρ_{17} שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 17).
2. הראו* כי ניתן לבנות מצולע משוכלל בן 17 צלעות בעזרת סרגל ומחוגה.

*ללא שימוש בשאלה 7.

שאלה 9

נאמר שמספר מרוכב $c \in \mathbb{C}$ הוא בר בנייה אם קיימים שדות $\mathbb{Q} = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_r \subseteq \mathbb{C}$ כך ש-$c \in L_r$ וגם $[L_i : L_{i-1}] = 2$ לכל $1 \le i \le r$. הוכיחו כי $c = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ בר בנייה אם ורק אם $|a|, |b|$ ברי בנייה במובן הרגיל.

שאלה 10

יהי f פולינום אי פריק ספרבילי מעל שדה F ויהי K שדה פיצול של f מעל F. יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ השורשים של f ב-K. נגדיר $d_f = \prod_{i \ne j}(\alpha_i - \alpha_j)$. הוכיחו כי $d_f \in F$.

(d_f נקרא הדיסקרימיננטה של f.)

שאלה 11

יהי f פולינום אי פריק ממעלה 4 מעל $\mathbb{Q}$ עם שורש ממשי חיובי α. נניח כי שדה הפיצול של f מעל $\mathbb{Q}$ הוא ממימד 24 מעל $\mathbb{Q}$. הראו כי α לא בר בנייה.

שאלה 12

מצאו את כל שדות הביניים של ההרחבות הבאות. ציירו דיאגרמת תתי שדות מתאימה.

1. $\mathbb{F}_{256}/\mathbb{F}_2$
2. $\mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}, \rho_6]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$
3. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}]/\mathbb{Q}$
4. $\mathbb{Q}[\rho_{24}]/\mathbb{Q}$

(בכל השאלות $\rho_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$).

שאלה 13

יהי ψ_{16} הפולינום הציקלוטומי ה-16. פרקו את ψ_{16} מעל $\mathbb{Q}[\rho_8]$ באשר $\rho_8 = \exp\left(\frac{2\pi i}{8}\right)$.

שאלה 14

יהי E שדה הפיצול של $x^4 - 4x^2 - 6$ מעל $\mathbb{Q}$. הראו כי $\sqrt{10} \in E$ ומצאו את כל האיברים $\sigma \in Gal(E/\mathbb{Q})$ המקיימים $\sigma(\sqrt{10}) = -\sqrt{10}$.

שאלה 15

הי f פולינום אי פריק ספרבילי מעל שדה F ויהי K שדה פיצול של f מעל F. יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ השורשים של f ב-K. הוכיחו:

א. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k \in F$ לכל $k \in \mathbb{N}$.
ב. נניח כי $n = 4$, אזי $[F[(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4)]: F] \leq 3$.
ג. בסעיף ב, האם ייתכן ש-$[F[(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4)]: F] = 2$? מדוע?

שאלה 16

1. מצאו תת שדה $K \subseteq \mathbb{Q}[\rho_{11}]$ המקיים $[K: \mathbb{Q}] = 2$. כמה שדות כאלה יש?
2. הראו כי ההרחבה $\mathbb{Q}[\rho_{11}]/K$ היא הרחבת גלואה ציקלית ממימד 5, אך לא קיים איבר $a \in \mathbb{Q}[\rho_{11}]$ כך ש-$\mathbb{Q}[\rho_{11}] = K[a]$ וגם $a^5 \in K$. (רמז: הראו כי $\rho_5 \notin \mathbb{Q}[\rho_{11}]$).

שאלה 17

יהי ψ_n הפולינום הציקלוטומי ה-n-י. יהי E שדה הפיצול של $\psi_5(x)\psi_7(x)$ מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$. חשבו את $[E: \mathbb{Q}]$. (רמז: $\rho_3 \in \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$).

שאלה 18

יהי F שדה ויהיו K, L שדות המכילים את F ומוכלים בשדה גדול יותר E. נניח כי $K/F, L/F$ הרחבות גלואה ממימד סופי עם חבורת גלואה אבלית. הוכיחו או הפריכו: KL/F היא הרחבת גלואה עם חבורת גלואה אבלית.

שאלה 19

נתונה הטענה (הנכונה) הבאה: לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת הרחבת גלואה E/F כך ש-$Gal(E/F) \cong S_n$.

הוכיחו בעזרת הטענה: לכל חבורה סופית G קיימת הרחבת גלואה E/F כך ש-$Gal(E/F) \cong G$. (רמז: משפט קיילי).

שאלה 20

יהי $\rho_n \in \mathbb{C}$ שורש יחידה n-פרימיטיבי ויהי $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}[\rho_n]$ שדה ביניים. יהי $a \in K$ ויהי f הפולינום המינימלי של f מעל $\mathbb{Q}$. הוכיחו או הפריכו: f מתפצל מעל K.

שאלה 21

תהי K/F הרחבת שדות ממימד סופי ויהי $f \in F[x]$ פולינום אי פריק. נגדיר $n = [K: F]$ ו-$m = \deg f$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם n לא מתחלק ב-m אז f אי פריק מעל K.
ב. אם n לא מתחלק ב-m אז ל-f אין שורש ב-K.
ג. אם $\gcd(n, m) = 1$ אז f אי פריק מעל K.
ד. לכל הגורמים הראשוניים של f ב-$K[x]$ יש אותה דרגה.
ה. אם K/F גלואה אז לכל הגורמים הראשוניים של f ב-$K[x]$ יש אותה דרגה.

שאלה 22

יהי $K \subseteq \mathbb{C}$ כך ש-$K/\mathbb{Q}$ הרחבה אלגברית. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $K/\mathbb{Q}$ ממימד סופי אז $[K:K\cap\mathbb{R}] \leq 2$.
ב. אם $K/\mathbb{Q}$ גלואה אז $[K:K\cap\mathbb{R}] \leq 2$.

שאלה 23

תהיי L/F הרחבת גלואה ממימד סופי.

1. יהיו K_1, K_2 שדות ביניים של L/F. נסמן $H_i = Gal(L/K_i)$. הוכיחו:
   a. $Gal(L/K_1K_2) = H_1 \cap H_2$
   b. $Gal(L/K_1 \cap K_2) = \langle H_1, H_2 \rangle$ (אגף ימין הוא תת החבורה הנוצרת ע"י H_1, H_2)
   c. אם K_1/F גלואה אז $Gal(L/K_1 \cap K_2) = H_1H_2$.
   d. אם $K_2 \subseteq K_1$ אז $[K_2:K_1] = [H_1:H_2] \coloneqq |H_1/H_2|$.
2. יהיו A, B, C שדות ביניים של L/F כך ש-$B \subseteq C$. הוכיחו בעזרת סעיף 1 או בכל דרך אחרת
   a. אם A/F גלואה אז $[C:B] \geq [A\cap C:A\cap B]$
   b. אם B/F ו-C/F גלואה אז $[C:B] \geq [A\cap C:A\cap B]$
3. הביאו דוגמא להרחבת גלואה L/F ושדות ביניים A, B, C כך ש-$B \subseteq C$ אבל $[C:B] < [A\cap C:A\cap B]$.

שאלות העשרה

השאלות הבאות חורגות מהחומר של הקורס (לפחות השנה), אך יש לכם את הכלים לפתור אותן. הנושאים המוצגים בהם כוללים: הוכחת משפטים, דוגמאות נגדיות למשפטים, בניות מיוחדות וגם כמה נושאים מתקדמים יותר.

שאלה A (נורמה ועקבה)

תהי K/F הרחבת שדות ממימד סופי. יהי $a \in K$. נגדיר העתקה לינארית $T_a: K \to K$ ע"י $T_a(x) = ax$. נתייחס את T_a כאל העתקה לינארית <u>מעל F</u>. מגדירים: $\mathrm{tr}(a) = \mathrm{tr}(T_a)$ ו-$N(a) = \det(T_a)$.

1. הוכיחו: $\mathrm{tr}(a) + \mathrm{tr}(b) = \mathrm{tr}(a+b)$ ו-$N(a)N(b) = N(ab)$ לכל $a, b \in K$.
2. הוכיחו כי הפולינום המינימלי של a מעל F שווה לפולינום המינימלי של T_a.
3. הוכיחו כי הפולינום האופייני של T_a הוא חזקה של הפולינום המינימלי של a מעל F. (רמז: יש משפט שאומר שהגורמים הראשוניים של הפולינום האופייני של העתקה לינארית זהים לגורמים הראשויים של הפולינום המינימלי שלה.)
4. נניח כי K/F גלואה ו-$G = Gal(K/F)$. הוכיחו $N(a) = \prod_{\sigma\in G}\sigma(a)$ ו-$\mathrm{tr}(a) = \sum_{\sigma\in G}\sigma(a)$.
5. הוכיחו כי אם K/F גלואה אז קיים איבר $a \in K$ כך ש-$\mathrm{tr}(a) \neq 0$. (רמז: העזרו במשפט הבסיס הנורמלי). הכלילו את הטענה לכל הרחבה ספרבילית.
6. הביאו דוגמא להרחבת שדות K/F עבורה $\mathrm{tr}(a) = 0$ לכל $a \in K$.

שאלה B (דוגמא נגדית למשפט האבר הקדום בהרחבה לא ספרבילית)

יהי F שדה ממאפיין $p > 0$. נגדיר $L = F(s,t)$ (שדה השברים של $F[s,t]$) ויהי $K = F(s^p, t^p)$ (שדה השברים של $F[s^p, t^p]$. באופן טבעי $K \subseteq L$).

1. הוכיחו כי $[L:K] = p^2$.
2. הוכיחו כי לכל $a \in L$ מתקיים $[K[a]:K] \in \{1,p\}$. הסיקו כי לא קיים $a \in L$ עבורו $L = K[a]$.
3. נניח כי F אינסופי. הראו כי יש אינסוף שדות ביניים $K \subsetneq E \subsetneq L$. (השוו לשאלה 4).

שאלה C (הוכחת משפט האבר הקדום)

תהי L/F הרחבת שדות ספרבילית ממימד סופי.

1. הראו כי אם F סופי אז קיים $a \in L$ כך ש-$L = F[a]$.
2. נניח כי F אינסופי. הראו כי אם V מ"ו ממימד סופי מעל F ו-$U_1, U_2, \dots, U_t \subsetneq V$ הם תתי מרחבים, אז $V \neq \cup_{i=1}^{t} U_i$.
3. העזרו בשאלה 4 ובסעיף 2 כדי להוכיח שאם F אינסופי אז קיים איבר $a \in L$ כך ש-$L = F[a]$.

שאלה D (הרחבת גלואה ממימד 3 של המספרים הרציונלים)

בתרגיל זה נראה כיצד לבנות הרחבת גלואה ממימד 3 מעל $\mathbb{Q}$.

יהי $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ פולינום אי פריק ממעלה 3 מעל $\mathbb{Q}$ ויהיו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ שורשי f.
נגדיר $d = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)$ ויהי $E = \mathbb{Q}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$.

1. הוכיחו כי $D := d^2 \in \mathbb{Q}$. (D נקרא גם הדיסקרימיננטה של f).
2. הראו כי אם $[E:\mathbb{Q}] = 6$ אז $d \notin \mathbb{Q}$. (רמז: מה הצמודים של d?)
3. הראו כי אם $[E:\mathbb{Q}] = 3$ אז $d \in \mathbb{Q}$.
4. הסיקו כי $[E:\mathbb{Q}] = 3$ אם"ם D הוא ריבוע ב-$\mathbb{Q}$.
5. נניח כי $f(x) = x^3 + qx + p$. הוכיחו כי $D = -4p^3 - 27q^2$.
6. העזרו בסעיפים 4 ו-5 כדי לבחור p, q כך ש-$[E:\mathbb{Q}] = 3$. (זהירות: f צריך להיות אי פריק). הסיקו כי $E/\mathbb{Q}$ היא הרחבת גלואה ממימד 3 של $\mathbb{Q}$.
7. הוכיחו כי לא קיים $a \in E$ כך ש-$E = \mathbb{Q}[a]$ וגם $a^3 \in \mathbb{Q}$.

הערה: זו שאלה פתוחה אילו חבורות יכולות להתקבל כחבורות גלואה של הרחבות גלואה של $\mathbb{Q}$.
התרגיל הזה מדגים כמה קשה הבעיה הזו.