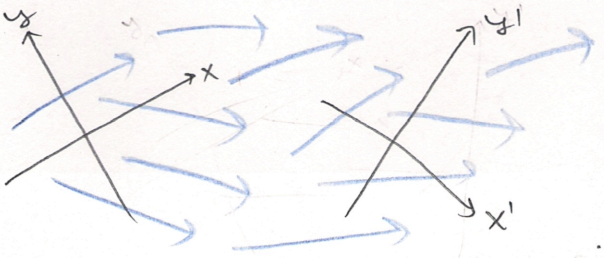
אינוריאנטיות תחת בחירת מערכות קואורדינטות שונות.

שדות סקלריים ווקטוריים מתארים אובייקטים פיסיקליים ולכן ייתכן שיהיו תלויים במערכת הצירים השרירותית שבחרנו. אנו רוצים להשתמש בעובדה זו בחישובינו.



בכדי להצדיק את העובדה שלכל האופרטורים שהגדרנו יש משמעות פיסיקלית עלינו להוכיח שגם הם בלתי תלויים בקואורדינטות.

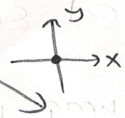
לשם כך, תחילה, עלינו להבין את המשמעות של "חוסר תלות" זו, וכיצד היא באה לידי ביטוי בחישוב.

אותה פונקציה יכולה לקבל צורה אלגברית שונה כתלות בקואורדינטות שונות.

דוגמא-

פונקציה המתאימה לכל נק' במישור את מרחק מנק' מסויימת

נסמן נק' זו כ"ראשית"

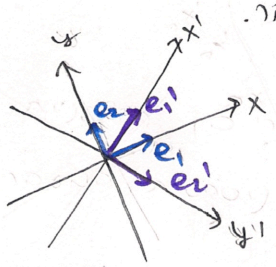


$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

נסמן נק' זו כקוטב

$$g(r,\theta)=r$$

אנו אומרים $f(x,y)=g(r,\theta)$ למרות שאין שיוויון אלגברי בין התבניות. את השיוויון $r=\sqrt{x^2+y^2}$ אנחנו מבינים רק מתוך נוסחאות המעבר.



בהרצאה פיתחנו נוסחאות מעבר **לשינוי קואורדינטות אורתוגונלי**

שדה סקלרי / וקטורי נתון

בוחרים מערכת קואורדינטות X | בוחרים מערכת קואורדינטות X'

את נוסחאות המעבר מקבלים מתוך הצגת הבסיס החדש 'e באמצעות הבסיס הישן e :

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

U אורתוגונלית

← ובגלל הקשר בין הצגה של וקטור בקואורדינטות שונות נתון ע"י:

$$X=U^TX' \quad ! \quad X'=UX$$

$f(x)$ $F(x)$	$g(x')$ $G(x')$

כיצד נראה שיוויון בין שתי ההצגות?

$f(x)=g(x')$ → $g(x')=f(U^Tx')$, $f(x)=g(Ux)$

$G(x')=F(x)$ → $G(x')=U\,F(U^Tx')$, $F(x)=U^TG(Ux)$

∇ אופרטורים לפי קואורדינטות X

∇ אופרטורים לפי קואורדינטות X'

$\nabla f(x)$ $\mathrm{div}\,F(x)$ $\mathrm{rot}\,F(x)$	$\nabla g(x)$ $\mathrm{div}\,G(x')$ $\mathrm{rot}\,G(x')$

כיצד נראה שיוויון בין שני החישובים?

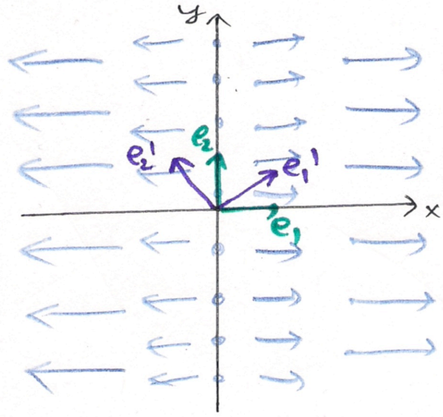
$\nabla g(x')=\nabla f(x)$ → $\nabla g(x)=U\nabla f(U^Tx')$, $U^T\nabla g(Ux)=\nabla f(x)$

$\mathrm{div}\,G(x')=\mathrm{div}\,F(x)$ → $\mathrm{div}\,G(x')=\mathrm{div}\,F(U^Tx')$, $\mathrm{div}\,G(Ux)=\mathrm{div}\,F(x)$

$\mathrm{rot}\,G(x')=\mathrm{rot}\,F(x)$ → $\mathrm{rot}\,G(x')=U\cdot\mathrm{rot}\,F(Ux')\cdot\det U$

$\det U=\pm 1$ ותלוי באם יש שינוי אוריינטציה בבסיס או לא

דוגמא: נתונה פונקציה $f(x,y)=x^2$ במערכת קואורדינטות (x,y) עם בסיס e_1,e_2



מערכת צירים נוספת מתקבל ע"י סיבוב מערכת צירים זו ב-$30°$. הראה שהשדה הגרדיאנטי של הפונקציה קווריאנטי תחת שינוי הקואורדינטות.

פתרון: בעצם, נחשב בשתי דרכים ונראה ש"יוצא אותו דבר".

במערכת צירים (x,y): $\nabla f(x,y) = (2x,0)$

נציג את החלפת מערכת הצירים ע"י נוסחאות עם מטריצת המעבר U:

הבסיס החדש: e_1' ; e_2' מתקבלים מ e_1 ו-e_2 ע"י סיבוב ב $30°$:

מטריצת סיבוב ב $30°$: $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{2} & -\frac12 \\ \frac12 & \frac{\sqrt3}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \quad e_1' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{2} \\ \frac12 \end{pmatrix} \quad e_2' = \begin{pmatrix} -\frac12 \\ \frac{\sqrt3}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} e_1' &= \tfrac{\sqrt3}{2} e_1 + \tfrac12 e_2 \\ e_2' &= -\tfrac12 e_1 + \tfrac{\sqrt3}{2} e_2 \end{aligned} \Leftarrow \quad \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{2} & \frac12 \\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \leftarrow U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{2} & \frac12 \\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2} \end{pmatrix}$$

נקבל: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{2} & \frac12 \\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{2} & -\frac12 \\ \frac12 & \frac{\sqrt3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

⇐ נציג את אותה הפונקציה במערכת (x',y'): $g\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x^2 = \left(\frac{\sqrt3}{2}x' - \frac12 y'\right)^2$

נחשב את הגרדיאנט בקואורדינטות (x',y'):

$$\nabla g\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{\sqrt3}{2}x' - \frac12 y'\right)\cdot\frac{\sqrt3}{2} \\ 2\left(\frac{\sqrt3}{2}x' - \frac12 y'\right)\cdot\left(-\frac12\right) \end{pmatrix}$$

נרצה להראות את הקשר בין ∇f ו ∇g: $\nabla g\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U \nabla f(U^T x')$

נחשב את אגף ימין:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{2} & \frac12 \\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2} \end{pmatrix} \nabla f \begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{2}x' - \frac12 y' \\ \frac12 x' + \frac{\sqrt3}{2}y' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{2} & \frac12 \\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\left(\frac{\sqrt3}{2}x' - \frac12 y'\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt3\left(\frac{\sqrt3}{2}x' - \frac12 y'\right) \\ -\left(\frac{\sqrt3}{2}x' - \frac12 y'\right) \end{pmatrix} = \nabla g\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)$$

✓