.1

$$\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ y+z &= -1 \\ x-3y+3z &= 9 \\ -2x+4y-24z &= -24 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 9 \\ -2 & 4 & -24 & -24 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 8 \\ -2 & 4 & -24 & -24 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & -26 & -22 \end{array}\right) \xrightarrow{-0.25R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -26 & -22 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -26 & -22 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4-6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -32 & -16 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_4}{16}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-0.5R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x=3, y=-1.5, z=0.5$$

$$\begin{cases} x+3y &= 5 \\ y-z &= 2 \\ x+2y+z &= 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

יש שורת סתירה. אין פתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2+i \\ 1 & 1-2i & 1 & 1-3i \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2+i \\ i & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1-2i & 1 & 1-3i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - iR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2+i \\ 0 & 2-2i & 1 & 3+2i \\ 1 & 1-2i & 1 & 1-3i \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2+i \\ 0 & 2-2i & 1 & 3+2i \\ 0 & -1-2i & 1 & 3-4i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2+i \\ 0 & 3 & 0 & 6i \\ 0 & -1-2i & 1 & 3-4i \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_2}{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2+i \\ 0 & 1 & 0 & 2i \\ 0 & -1-2i & 1 & 3-4i \end{array}\right) \xrightarrow{R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2+i \\ 0 & 1 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 1 & -1-2i \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2-3i \\ 0 & 1 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 1 & -1-2i \end{array}\right)$$

חישוב עזר: $3-4i-2i(-1-2i) = 3-4i+2i-4 = -1-2i$

תשובה סופית: $x=-2-3i, y=2i, z=1-2i$.

1. נניח כי אחרי דירוג של מערכת נתונה הגענו ל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

מצאו את קבוצת הפתרונות למערכת בהנחה ש:

(א) המערכת הומוגנית עם 4 משתנים

(ב) המערכת לא הומוגנית עם 3 משתנים.

סעיף א'- כאשר מתייחסים למערכת כמערכת שמייצגת מערכת הומוגנית, זה אומר שוקטור התוצאה הוא 0.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

יש (גודל השדה בריבוע) פתרונות, יש משתנים חופשיים. בשתי העמודות האחרונות אין איבר מוביל. נמצא פתרון כללי.

נניח שלמשתנים קורים x, y, z, w.

נסמן $z=t, w=s$.

$y=-3s$

$x=-2t+s$

קבוצת הפתרונות היא

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2t+s \\ -3s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t, s \in \mathbb{F} \right\}$$

.1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי ולכן מספר הפתרונות שווה לגודל השדה.

$z = t$

$y = 3$

$x = -1 - 2t$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1-2t \\ 3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{F} \right\}$$

1. מצאו לאילו ערכי a למערכת יש פתרון יחיד/אין פתרון/אינסוף פתרונות

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a^2 & 1 & 2+a \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 3a & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a^2 & 1 & 2+a \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 3a & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 & 2+a \\ a & 3a & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \\ a & 3a & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - aR_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \\ 0 & 3a-a^2 & 1-a & 5-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 3a-a^2 & 1-a & 5-a \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 3a-a^2 & 0 & 3-a \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_2}{3a-a^2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_3}{1-a}}$$

הפעולה הנ"ל אפשרית רק בהנחה ש $3a - a^2 \neq 0$, כלומר, $a \neq 3, 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1-a} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - aR_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1-a} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1-a} \end{array}\right)$$

הפעולה הזאת אפשרית רק כאשר $1-a \neq 0$, כלומר, $a \neq 1$.
כאשר $a \neq 0,1,3$ למערכת יש פתרון יחיד.
נציב $a = 0$ במטריצה האחרונה לפני שהיינו צריכית את ההנחה ש$a \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

יש שורת סתירה, אין פתרון.
נציב $a = 3$ במטריצה האחרונה לפני שהיינו צריכית את ההנחה ש$a \neq 3$.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}$$

יש אינסוף פתרונות כי y הוא משתנה חופשי.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$y = t, z = -1, x = 2 - 3t$.
נציב $a = 1$ במטריצה האחרונה לפני שהשתמשנו בהנחה ש$a \neq 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

שורת סתירה. אין פתרון.
לסיכום: עבור $a \neq 0,1,3$ יש פתרון יחיד. עבור $a = 3$ יש אינסוף פתרונות. ועבור $a = 0,1$ אין פתרון.

1. נתונה מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ המקיימת כי

$$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \xrightarrow{3R_2} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מצאו את A.

פתרון: עושים את הפעולות ההפוכות, בסדר הפוך.
אנחנו בעצם רוצים לבטל את הפעולות שעשינו מהסוף להתחלה.
קודם נבטל את הפעולה של $R_2 - 2R_1$. וככה נגלה מי הייתה פעולה המטריצה שלפני.
הביטול של הפעולה (הפעולה ההפוכה) הוא $R_2 + 2R_1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נבטל את פעולת $3R_2$, ע"י חילוק השורה השניה ב3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הביטול של החלפת שורות הוא להחליף את אותן שורת.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. נכון/לא נכון:

(א) למערכת משוואות המיוצג ע"י מטריצה 2×4 אין פתרון.
פתרון: הטענה לא נכונה. נביא דוגמא נגדית.

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ x + y = 7 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(ב) לכל מטריצה יש צורה מדורגת יחידה.
פתרון: לא. דוגמא נגדית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ג) למטריצה $m \times n$ יש לכל היותר m איברים פותחים (בצורה מדורגת)
פתרון: נכון. ההגדרה של איבר מוביל זה האיבר בראשון שלו ששונה מ0. בפרט, בכל שורה יש לכל היותר איבר מוביל אחד. לכן מספר האיברים המובילים הוא לכל היותר מספר השורות.

(ד) למטריצה $m \times n$ יש לכל היותר n איברים פותחים (בצורה מדורגת)
פתרון: נכון. בכל עמודה יש לכל היותר איבר מוביל אחד. לכן האיברים המובילים הוא לכל היותר מספר העמודות.

(ה) למערכת עם אינסוף פתרונות תהיה שורת אפסים בצורה מדורגת.
פתרון: לא בהכרח.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(ו) בצורה מדורגת יש איבר יחיד שונה מאפס בכל עמודה.
פתרון: לא נכון.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(ז) בצורה מדורגת קנונית יש איבר יחיד שונה מאפס בכל עמודה
פתרון: לא נכון

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

(ח) בצורה מדורגת קנונית יש לכל היותר איבר יחיד שונה מאפס בכל עמודה
פתרון: לא נכון.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$