פתרון תרגיל 11

תרגילים מהחוברת:

שאלה 9.4

א) יהי $v=\left(\alpha_1,\dots,\alpha_n\right)$ נראה כי מתקיים $v=\alpha_1 e_1+\dots+\alpha_n e_n\ (*)$. ברור כי $\alpha_1 e_1+\dots+\alpha_n e_n\in F^n$ לכן כדי להוכיח את השוויון $(*)$ מ"ל את השויון ברכיב i לכל $1\le i\le n$.

כזכור: $\left(e_j\right)_i=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ $\forall 1\le i,j\le n,$ לכן:

$$\left(\alpha_1 e_1+\dots+\alpha_n e_n\right)_i=\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j\right)_i=\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\alpha_j e_j\right)_i+\left(\alpha_i e_i\right)_i=$$
$$\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\alpha_j\left(e_j\right)_i\right)+\alpha_i\left(e_i\right)_i=\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\alpha_j\cdot 0\right)+\alpha_i\cdot 1=\alpha_i=v_i$$

ב) מכיון ש $S=\{e_1,\dots,e_n\}$ אזי לכל $v=\left(\alpha_1,\dots,\alpha_n\right)$ נקבל עפ"י סעיף א' כי $[v]_S=\left(\alpha_1,\dots,\alpha_n\right)$.

שאלה 10.5 ו'

$V=\mathbb{R}^2$, $B=\{(4,5),(1,0)\}, C=\{(1,1),(2,3)\}$ למעשה עפ"י השאלה אנו מחפשים את P_C^B אנו נמצא את המטריצה עפ"י הרעיון בסעיפים א-ה.

מתקיים $P_C^B=P_C^S\cdot P_S^B=\left(P_S^C\right)^{-1}\cdot P_S^B$ באשר $S=\{(1,0),(0,1)\}$ הבסיס הסטנדרטי.

$P_S^B=\begin{pmatrix}4&1\\5&0\end{pmatrix}, P_S^C=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$ כעת עליכם רק למצוא את $\left(P_S^C\right)^{-1}$ שהיא ההופכית של P_S^C בשימוש האלגוריתם המוכר ולהכפיל ב P_S^B. המטריצה שתתקבל היא מטריצת המעבר המבוקשת.

תרגיל לא מהחוברת:

א. $$[I]_S^B=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&3&0\\3&0&8\end{pmatrix}\ ,\ [I]_B^S=\left([I]_S^B\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0.75&-0.25&0\\-0.5&0.5&0\\-0.28125&0.09375&0.125\end{pmatrix}$$

ב. $[v]_S=(1,2,3)$

ג. ידוע שמתקיים $[v]_B=[I]_B^S[v]_S$. אצלנו -

$$[v]_B=\begin{pmatrix}0.75&-0.25&0\\-0.5&0.5&0\\-0.28125&0.09375&0.125\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{9}{32}\end{pmatrix}$$

תרגילים נוספים:

1.

א. $[d_1]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, [d_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, [d_3]_B = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

ב. $[I]_B^E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, [I]_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$[I]_C^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, [I]_E^C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ואת

$$[I]_B^C = [I]_B^E [I]_E^C = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, [I]_C^B = [I]_C^E [I]_E^B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

ג. הראו שמתקיים עבור d_3 :

$$[d_3]_B = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = [I]_B^E [d_3]_E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. יהי V מ"ו ממימד n מעל שדה F, ויהי $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n\}$ בסיס של V.

א. נוכיח: $[v]_B = [w]_B$ אמ"א $v = w$.

נניח $v = w$, ונניח בשלילה ש $[v]_B \neq [w]_B$. לפי משפט מסמסטר א', כל וקטור ניתן להצגה בצורה יחידה לפי כל בסיס שהוא. ולכן קיבלנו בעצם שתי הצגות שונות של אותו וקטור לפי בסיס B בסתירה.

בצורה דומה אם $[v]_B = [w]_B$ ולכן $v = w = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \cdots + \alpha_n b_n$ וזהו בעצם אותו צ"ל ולכן זהים.

ב. נגדיר הע"ל $T: V \to \mathbb{F}^n$ מוגדרת בצורה הבאה: עבור $v \in V$ ישנה הצגה $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \cdots + \alpha_n b_n$. נגדיר ההעתקה: $T(v) = [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

זוהי הע"ל **חח"ע** היות והגרעין שלה הוא $\{0\}$ (קל להוכיח). לפי משפט הדרגה $\dim \ker T + \dim imT = n$ ולכן כאן נקבל ש $\dim imT = n$ ולכן זהו איזומורפיזם כלומר ההעתקה היא על ולכן לכל $\vec{x} \in F^n$ יש $v \in V$ כך ש $[v]_B = \vec{x}$.

תרגלים על דטרמיננטות לפי תמורות:

1. ב S_4 ישנן 24 תמורות מתוכן 12 זוגיות ו 12 אי זוגיות. ואנחנו בטוחים שמצאתם את כולם.....

2.

א. התמורות וההופכיות שלהן :

$$\sigma_1=(1,2,3,4)\Rightarrow\sigma_1^{-1}=(1,4,3,2),\quad \sigma_2=(2,1)(4,3)\Rightarrow\sigma_2^{-1}=(2,1)(4,3),$$
$$\sigma_3=(1,3)(2,4)\Rightarrow\sigma_3^{-1}=(1,3)(2,4),\quad \sigma_4=(2,4,3)\Rightarrow\sigma_4^{-1}=(2,3,4)$$

ב. $sign(\sigma_1)=1,\ \ sign(\sigma_2)=1,\ \ sign(\sigma_3)=1,\ \ sign(\sigma_4)=-1$

ג. נכתוב חלק מהפתרונות :

$$\sigma_1\circ\sigma_2=(1,2,3,4)\circ(2,1)(4,3)=(1,3)(2)(4),\ \ \sigma_3^{\,2}=(1,3)(2,4)\circ(1,3)(2,4)=id$$

3. הפתרונות :

א. $\begin{vmatrix}2&6&3\\5&1&0\\3&6&4\end{vmatrix}=4_{\bmod \mathbb{Z}_7}$ $\quad\begin{vmatrix}3&1&5\\4&0&6\\-1&3&5\end{vmatrix}=0,$ (מעל $\mathbb{R}$)

4. נפריך : לכל מס' טבעי n ולכל תמורה $\sigma\in S_n$ קיים "שורש" כלומר קיימת תמורה $\tau\in S_n$ כך ש : $\tau\tau=\sigma$, אך תחילה נסביר : אילו לכל תמורה היה "שורש" , אזי כל התמורות היו זוגיות. למה ? אחרת, לפי משפט ש $sign(\tau\sigma)=sign(\tau)sign(\sigma)$ נקבל ש :

$sign(\tau^2)=sign(\tau)sign(\tau)=\left(sign(\tau)\right)^2=1$, ולכן זה לא יתכן.

והנה ניתן דוגמא נגדית : ב S_2 ישנן רק 2 תמורות : $id,(1,2)$. לתמורה $(1,2)$ אין שורש, היות ו $id^2=id$ ו $(1,2)^2=id$.

5. **<u>עיקרון הפתרון הוא כי התמורה היא פונקציה חח"ע</u>**. לפי הגדרת דטרמיננטה לפי תמורות $\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)}a_{5\sigma(5)}$.

לכן, נשים לב שכל תמורה בוחרת איבר אחד בלבד מכל שורה ואיבר אחד מכל עמודה.

נניח כי בה"כ נבחרו 4 האיברים הראשונים במכפלה $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)}a_{5\sigma(5)}$ כך שהם שונים מאפס.

אזי כיוון ש- $a_{1\sigma(1)}$ נבחר מהשורה הראשונה והוא שונה מאפס הוא יכול להיבחר מכל 5 העמודות.

$a_{2\sigma(2)}$ נבחר מהשורה השנייה והוא שונה מאפס לכן הוא יכול להיבחר מ-4 העמודות הנותרות.

$a_{3\sigma(3)}$ נבחר מהשורה השלישית והוא שונה מאפס לכן הוא יכול להיבחר רק מהעמודות 4 או 5.

$a_{4\sigma(4)}$ נבחר מהשורה הרביעית והוא שונה מאפס לכן גם הוא יכול להיבחר רק מהעמודות 4 או 5.

האיבר האחרון $a_{5\sigma(5)}$ נבחר מהשורה החמישית כאשר 2 האיברים הקודמים נבחרו שניהם מהעמודות 4 ו-5 לכן האיבר הזה כבר לא יכול להיבחר מהעמודות הללו לכן הוא בהכרח יבחר מהעמודות 2,1 או 3 לכן הוא בהכרח שווה לאפס, לכן המכפלה שווה לאפס. וכך לכל מכפלה לכן סה"כ סכום המכפלות שווה ל-0 לכן הדטרמיננטה =0. כך תמיד עבור בחירת השלוש האיברים האחרונים בהנחה ששניים מהם שונים מאפס כלומר נבחרו מעמודות 4 ו-5 האיבר הנותר תמיד יבחר משלוש העמודות הנותרות 2,1 או 3 ולכן הוא יהיה אפס. לכן תמיד כל מכפלה שווה לאפס. מש"ל.