בס"ד

# אלגברה לינארית 1- תרגיל 5

להגשה בשבוע של 18.11

1 א. כתבו את המטריצה הבאה וההופכית שלה ( אם קיימת ) כמכפלה של אלמנטאריות :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ב. הפוך את המטריצה הבאה בשיטת גאוס-ז'ורדן:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. יהיו $A,B \in F^{n\times n}$ כך ש A הפיכה. הוכח או הפרך :

a. למערכות $Ax=0, ABx=0$ אותם פתרונות.

b. למערכות $A^{-1}x=0, BAx=0$ אותם פתרונות.

c. לכל וקטור $b \neq 0$, ל $ABx=b, BAx=b$ אותם פתרונות.

3. הוכח או הפרך :

a. אם $A^2=0$ אזי $A=0$ .

b. אם $A^2=I$ , אזי $A=I$ .

4. הוכח : A הפיכה אמ"ם קיים K כך ש $A^k$ הפיכה.

5. מצאו את כל הערכים של $\alpha$ עבורם קיימת מטריצה $B \in \mathbb{C}^{4\times 3}$ שונה מ 0 כך ש

$$B\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. נתון כי עבור $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מתקיים ש : $A^2+5A+6I=0$ . הוכיחו כי A הפיכה.

7. תהיינה A ו B מטריצות ריבועיות מאותו סדר, כך שמתקיים $A^3=I$ ו $BA=A(A+I)$ .

א. הוכיחו כי $A^{-1}=A^2$ .

ב. הוכיחו כי $B=A+I$ .

ג. הוכיחו כי $BABA=A^2B^2$

8. מטריצה $A \in F^{n\times n}$ נקראת נילפוטנטיות מסדר K אם : $A, A^2, ..., A^{k-1}$ כולן שונות מ-0 אבל $A^k = 0$ . לדוגמה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ היא נילפוטנטיות מסדר 2.

a. הוכח שמטריצת האפס היא נילפוטנטיות מסדר 1.
b. הוכח שכל מטריצה נילפוטנטיות היא "מחלקת אפס" ( כלומר קיימת $B \neq 0$ כך ש : $AB = 0$ ).
c. הוכח שכל מטריצה נילפוטנטיות אינה הפיכה.( רמז : תניחו בשלילה...)

**בהצלחה!!**