אבנר סופר

אוניברסיטת תל אביב

מבוא לפיזיקה מודרנית

תורת היחסות הפרטית

הגיאומטריה של המרחב-זמן

שימו לב שטרנספורמציית בוסט מערבבת בין זמן למרחב.

לאחר בוסט של ארוע מ-O ל-'O, קואורדינטת הזמן (המרחב) של הארוע ב-'O תלויה לא רק בקואורדינטת הזמן (המרחב) שלו ב-O אלא גם בקואורדינטת המרחב (זמן) שלו ב-O.

נשים לב שבוסט דומה במובן זה לסיבובים מרחביים.

גם סיבוב מרחבי מערבב בין קואורדינטות x ו-y של נקודה מסוימת.

בפרק זה נשתמש בהשוואה בין בוסט לסיבוב כדי להבין טוב יותר את המשמעות של הבוסט ושל העקרונות הבסיסיים של תורת היחסות.

<u>יצוג זויתי של בוסט</u>

ראינו את כלל חיבור המהירויות

$$\beta_{02} = \frac{\beta_{12} + \beta_{01}}{1 + \beta_{12}\beta_{01}}$$

כאשר β_{ij} היא המהירות של O_j ב-O_i.

הכלל נראה מוזר, אך מענין לציין ישנה פונקציה שלה אותו כלל חיבור:

$$\tanh(\phi_1 + \phi_2) = \frac{\tanh\phi_1 + \tanh\phi_2}{1 + \tanh\phi_1 \tanh\phi_2}$$

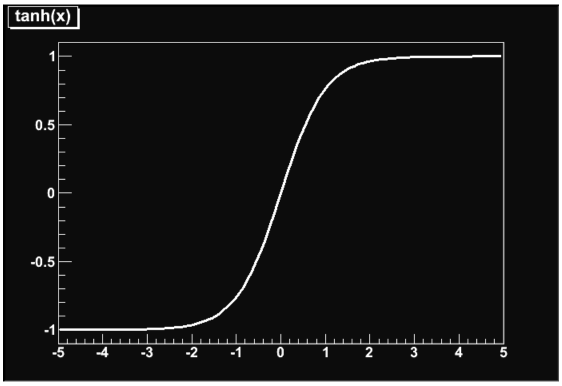
כאשר

$$\tanh\phi = \frac{\sinh\phi}{\cosh\phi} = \frac{e^{\phi} - e^{-\phi}}{e^{\phi} + e^{-\phi}}$$

$$\sinh\phi = \frac{e^{\phi} - e^{-\phi}}{2}$$

$$\cosh\phi = \frac{e^{\phi} + e^{-\phi}}{2}$$

הפונקציה $\tanh\phi$ נראית כך:



כמו המהירות β, גם $\tanh\phi$ מוגבלת לתחום (1 ,1-).

כמו כן, מתקיים

$$\cosh\phi = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\phi}}$$

(שימו לב לדמיון לתלות γ של ב-β).

לכן ניתן להשתמש בפרמטריזציה

$$\beta = \tanh\phi$$
$$\gamma = \cosh\phi$$
$$\gamma\beta = \sinh\phi$$

ואז מטריצת טרנספורמצית לורנץ היא

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

השוו למטריצה של טרנספורמצית סיבוב בזוית ϕ סביב ציר z:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

טרנספורמצית סיבוב מקיימת:

- $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$
- $r^2 = x^2 + y^2$ נשמר

בעוד טרנספורמצית לורנץ מקיימת

- $\cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1$
- $s^2 = t^2 - x^2$ נשמר

השוואה נוספת:

בקואורדינטות פולריות,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x},$$

טרנספורמצית סיבוב הופכת להיות

$$r' = r$$
$$\theta' = \theta - \phi$$

בקואורדינטות רינדלר (Rindler)

$$t = s\cosh\theta, \quad x = s\sinh\theta, \quad s = \sqrt{t^2 - x^2}, \quad \theta = \tanh^{-1}\frac{x}{t}$$

טרנספורמצית לורנץ הופכת להיות

$$s' = s$$
$$\theta' = \theta - \phi$$

הערה: הגדרה זו של קואורדינטות רינדלר טובה עבור $t^2>x^2$. בתחום $t^2<x^2$ יש להגדיר $s = \sqrt{x^2 - t^2}, \quad \theta = \tanh^{-1}\frac{t}{x}$.

שימו לב שהקואורדינטה s היא האינטרוול האינוריאנטי, ממש כשם שהקואורדינטה r היא המרחק המרחבי, האינוריאנטי תחת סיבובים.

הערה: שימו לב שאין זהות בין הזוית ההיפרבולית של הבוסט $\phi=\tanh^{-1}\beta$ והזוית $\alpha=\tan^{-1}(\beta)$ בין ציר הזמן במערכת O וציר הזמן במערכת 'O (או בין ציר המרחב ב-O וציר המרחב ב-'O).

<u>הפרוש הגיאומטרי של טרנספורמצית לורנץ</u>

כעת אפשר להבין את עקרונות תורת היחסות באור חדש וברור יותר:

הראינו שעקרון קביעות מהירות האור

- מסביר את ניסוי מייקלסון-מורלי,
- הופך את משוואות מקסוול לנכונות עבור כל מערכת אינרציאלית,
- מביא לתוצאות (אבדן סימולטניות, התקצרות האורך, התארכות הזמן) מוכחות ניסיונית.

למרות זאת, עקרון זה נראה שרירותי ולא מובן.

- איך יתכן שמהירות האור זהה עבור כל הצופים, בשעה שזה אינו נכון עבור אף מהירות אחרת?
- הרי אם מהירות האור זהה עבור צופה בחללית מהירה ועבור צופה על כדור הארץ, זה כאילו שכל אחד מהם רואה קרן אור אחרת. **האם לקרן האור אין מהירות אמיתית אחת?**
- האם כל התוצאות שמצאנו מתיחסות ל**מדידה** בלבד, או לזמן ולמרחב **האמיתיים**?

הפתרון לבעיה התפישתית הוא בהבנת הנקודה הבאה:

טרנספורמצית לורנץ מלמדת אותנו על הגיאומטריה של המרחב-זמן.

- בוסט גורם להחלפה חלקים בין הקואורדינטות x ו-t, כשם שסיבוב מחליף בין x ו-y.
- לכן, כשם ש- x ו-y הן שתי קואורדינטות במרחב דו-ממדי,
  גם x ו-t הן שתי קואורדינטות במרחב-זמן דו-ממדי.

אלא שבמקום גיאומטריה אאוקלידית, כמו זו של המרחב התלת-מימדי,

תורת היחסות מציגה לנו את גיאומטרית מינקובסקי של המרחב-זמן.

המאפינים הגיאומטרים של פיזיקה ניוטונית ופיזיקה יחסותית (גיאומטריה אאוקלידית וגיאומטרית מינקובסקי) הם:

פיזיקה	ניוטונית	יחסותית
גיאומטריה	(מרחב אאוקלידי) × (זמן אאוקלידי)	מרחב-זמן מינקובסקי
משתנים	(t) × (x,y,z)	t,x,y,z
אלמנט מרחק אינפיניטסימלי	$dr^2 = dx^2+dy^2+dz^2$	$ds^2 = dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$
טרנספורמציה	סיבוב (למשל, סביב ציר z) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	בוסט (למשל, בכוון x) $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$
אינוריאנטים תחת הטרנספורמציה	$r^2 = x^2+y^2+z^2$ t	$s^2 = t^2-x^2-y^2-z^2$

אלמנט המרחק האינפיניטסימלי הוא הגודל הבסיסי שמאפיין את הגיאומטריה.

הערה: גם סיבוב מרחבי הוא טרנספורמצית לורנץ, משום שהוא משמר את האינטרוול $ds^2=dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$. בוסטים וסיבובים שייכים לחבורה של טרנספורמציות שנקראת **חבורת לורנץ**, שהמייחד את חבריה הוא שהם משמרים את האינטרוול.

אם כך:

אנו תיארנו את תורת היחסות בצורה היסטורית שמתבססת על הבנות קודמות מפיזיקה ניוטונית:

- בעיות עם ניסוי מייקלסון-מורלי
- הפתרון – קביעות מהירות האור
- השלכות, טרנספורמצית לורנץ.

באותה מידה ניתן לנסח את העקרון הבסיסי של תורת היחסות כך:

למרחב-זמן גיאומטרית מינקובסקי,

כלומר, אלמנט מרחק אינווריאנטי נתון ע"י $ds^2 = dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$.

ניסוח זה הוא לא בסגנון של סקירה היסטורית אלא של "ככה זה" (בדומה לנושאים רבים אחרים שאתם לומדים בפיזיקה).
מניסוח זה מתקבלות התופעות הבסיסיות של תורת היחסות.

השוו לעקרון הבא:

למרחב גיאומטריה אאוקלידית,

כלומר, אלמנט מרחק אינווריאנטי נתון ע"י $dr^2=dx^2+dy^2+dz^2$.

אנו מקבלים עקרון זה מבלי לומר אותו באופן מפורש. אך ללא עקרון זה פיזיקה ניוטונית היתה נכשלת. למשל, כל השימוש שלנו בוקטורים היה שגוי.

הערות:

- ביחסות כללית מורחב הדיון לגיאומטריות של מרחבים מעוקמים, ואז אלמנט המרחק הוא פונקציה פחות טריוויאלית של המרחב.

  למשל, בקואורדינטות מרחב כדוריות, $x = r\sin\theta\cos\phi;\ \ y = r\sin\theta\sin\phi;\ \ z = r\cos\theta$

  אלמנט המרחק האינפיניטסימלי של מרחב מינקובסקי הופך להיות

  $ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi\right)$. אך בסביבות מסה M בעלת התפלגות עם

  סימטריה כדורית, מקבלים בתורת היחסות הכללית

  $ds^2 = \left(1-\frac{r_s}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi\right)$, כאשר $r_s=2GM$ הוא רדיוס החור

  השחור שיוצרת המסה אם היא תופסת נפח קטן מספיק.

  גיאומטריות שונות משחקות תפקידים חשובים בתורת המיתרים, בפיזיקת החלקיקים, ובתחומים אחרים.

- מאחר שטרנספורמצית לורנץ בסה"כ מתארת "סיבובים" (בוסטים) במרחב מינקובסקי, הקבוע c מתיחס ל**מהירות האור בריק** בלבד.

  הגיאומטריה של המרחב-זמן אינה משתנה בעקבות קיומו של חומר שעובר אינטראקציה עם אור ולכן מאיט את מהירותו.

- זה מצדיק את השימוש שלנו ב-$c=1$. הרי לא היינו חושבים למדוד את x ואת y ביחידות שונות!
- הדבר היסודי הוא הגיאומטריה, לא המהירות בה מתפשט אור.

כפי שנראה מאוחר יותר, זה שלאור ישנה המהירות של אור היא 1 נובע מזה שלפוטונים (חלקיקי האור) יש מסה 0.

הערה: את אלמנט המרחק במרחב מינקובסקי אפשר גם לקבל ע"י הפיכת הזמן למספר מדומה: $T = it$.

אז $ds^2 = -(dT^2+dx^2+dy^2+dz^2)$,

והפונקציות ההיפרבוליות בטרנספורמצית לורנץ הופכות לפונציות טריגונומטריות.

לכן נהוג לומר שמרחב מינקובסקי הוא מרחב אאוקלידי עם זמן מדומה.

אמירה זו אינה מדויקת, משום ש

- עדיין קיים סימן מינוס בהגדרת האונטרוול,
- לאיברים הלא-אלכסוניים של מטריצת הבוסט אותו סימן, בשעה שלאלה של מטריצת הסיבוב סימנים הפוכים.

עוד על גיאומטריה אאוקלידית וגיאומטריה היפרבולית

נתבונן במרחב **אאוקלידי** במערכת קואורדינטות O_0 ובה נקודה מרחבית $x_0=0,\ y_0=1$.

כעת נעבור למערכת O_1 שמסובבת בזוית של $\theta_1=5°$ מעלות סביב ציר z ביחס ל-O_0.

אז ב-O_1, הקואורדינטות של הנקודה שלנו הן $x_1=-y_0\sin\theta_1,\quad y_1=y_0\cos\theta_1$.

נעבור ל-O_2, שמסובבת בזוית של $\theta_2=10°$ מעלות סביב ציר z ביחס ל-O_0.

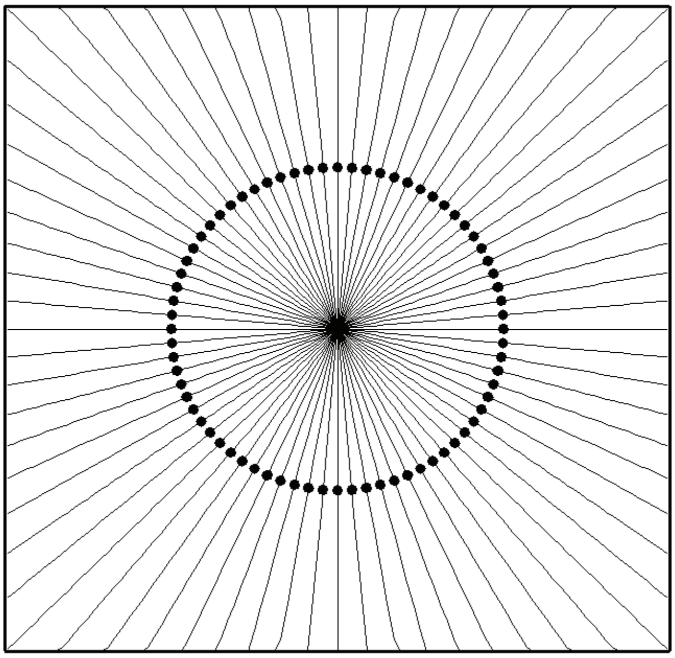
אז ב-O_2, הקואורדינטות של הנקודה שלנו הן $x_2= -y_0\sin\theta_2,\quad y_2=y_0\cos\theta_2$.

וכולי...

מאחר שסיבוב משמר את האורך $r^2=x^2+y^2$, בכל מערכת יתקיים התנאי $x_n^2+y_n^2= x_0^2+y_0^2=1$.

המשוואה $r^2=x^2+y^2$ מתארת מעגל ברדיוס 1.

אז אוסף הדיאגרמות שנקבל יהיה



הנקודות מראות את מיקום הנקודה (x_0,y_0), כאשר הצירים הניצבים הם אלה של המערכת O_n,
המסובבת בזוית θ_n ביחס ל-O_0.

כעת נחזור על התרגיל בגיאומטרית מינקובסקי במקום גיאומטריה אאוקלידית:

נתבונן בצירי המערכת $O_0 = O$ שבה קואורדינטות ארוע שהוא TL הן $x_0=0,\ t_0=1$,
כלומר הארוע הוא על ציר t.

שימו לב שהאינטרוול של האירוע הוא $t_0^2-x_0^2=1$

נבצע טרנספורמציה למערכת O_1 שנעה במהירות $\boldsymbol{\beta_1=0.087}=\tan5°$ ביחס ל-O_0, ונצייר את הארוע באותה מערכת, כאשר הצירים הניצבים יהיו הפעם צירי O_1.

שימו לב שבשל שימור האינטרוול ביחס לראשית, הקואורדינטות t_1, x_1 מקיימות $t_1^2-x_1^2=1$.

לכן, מאחר ש- $|x_1| > |x_0|$, אז גם $|t_1| > |t_0|$.

נמשיך ונבצע טרנספורמציה למערכת O_2 שנעה במהירות $\boldsymbol{\beta_2=0.176}=\tan10°$ ביחס ל-O_0,
ונצייר את הארוע באותה מערכת, כאשר הצירים הניצבים יהיו הפעם צירי O_2.

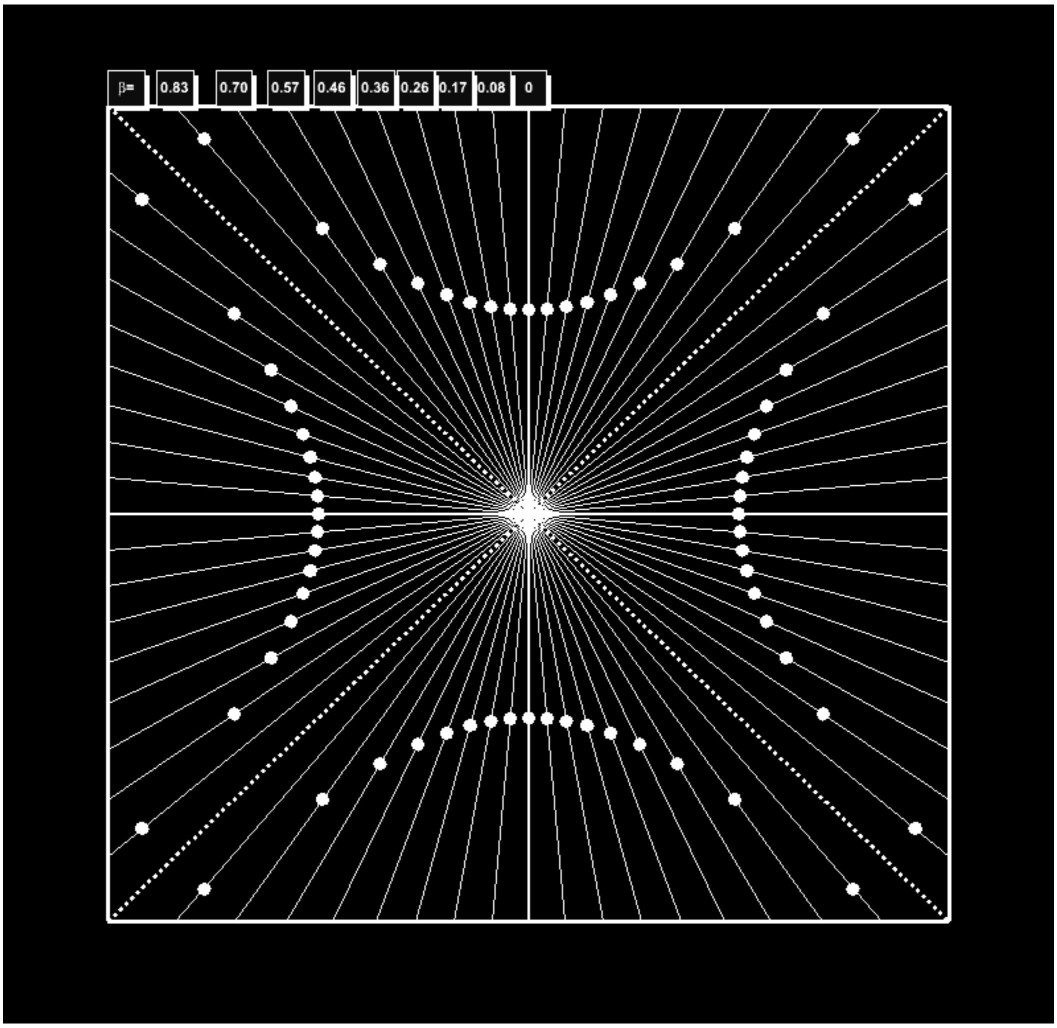
וכולי...

מאחר שמדובר תמיד באותו ארוע שהאינטרוול שלו ביחס לראשית הוא $s^2=t_0^2-x_0^2=1$,

אז זהו האינטרוול שלו בכל המערכות, כלומר, $t_n^2-x_n^2=1$.

זוהי משוואת **היפרבולה**. לכן, ערכי הקואורדינטות של הארוע בכל המערכות האפשריות מתארות היפרבולה.

נקבל את אוסף הדיאגרמות הבאות:



הנקודות העליונות מראות את הארוע שלנו כפי שהוא נראה כאשר הצירים הניצבים שייכים כל פעם למערכת שנעה במהירות הנראית למעלה ביחס ל-O_0.

הנקודות התחתונות מתארות את הארוע $x_0=0,\ t_0=-1$, גם הוא TL.

הנקודות מימין (משמאל) מתארות את הארועים $t_0=0,\ x_0=\pm 1$, שהם SL.

יש לראות את אוסף הנקודות כמתארות את הגיאומטריה של המרחב-זמן.

אילו הגיאומטריה היתה אאוקלידית, הנקודות היו מתארות מעגל.

בגיאומטרית מינקובסקי הן מתארות היפרבולות.

בשל המשוואה ההיפרבולית המתארת את אוסף הטרנספורמציות האפשריות של אותו ארוע,

נהוג לקרוא למרחב-זמן **מרחב היפרבולי** ולומר שהוא בעל **גיאומטריה היפרבולית.**

השמות **מרחב מינקובסקי** ו**מרחב פסאודו-אאוקלידי** נמצאים אף הם בשימוש.