פתרון תרגיל בית 4 – טופולוגיה

שאלה 1

א. הוכיחו את הטענה הבאה: A סגורה $\Leftrightarrow$ $A'\subseteq A$.

ב. מצאו את נקודות ההצטברות של תת הקבוצות הבאות של המרחב המטרי $\mathbb{R}$:

1. $\mathbb{Q}$,
2. $(0,1)$.

פתרון

סעיף א

$\Leftarrow$: תהי $x\in A'$, אזי קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq A\setminus\{x\}$ כך ש-$x_n\to x$. מתקיים ש-$A\supseteq\{x_n\}$ ומכיוון ש-A היא קבוצה סגורה, היא מכילה את כל נקודות הגבול של הסדרות שמתכנסות שלה ולכן $x\in A$.

$\Rightarrow$: נתון $A'\subseteq A$. נבחר סדרה מתכנסת $\{x_n\}\subseteq A$, $x_n\to x\in X$ ונרצה להראות ש-$x\in A$. נניח בשלילה ש-$x\notin A$. אבל אז $\{x_n\}\subseteq A=A\setminus\{x\}$ ומכאן $x\in A'$. היות ו-$A'\subseteq A$ נקבל $x\in A$ בסתירה להנחה. לכן A סגורה.

סעיף ב

1. מכיון שבין כל שני מספרים ממשיים נמצא מס' רציונלי נקבל שקבוצת נק' הצטברות של $\mathbb{Q}$ היא כל $\mathbb{R}$. שכן לכל $r\in\mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים מספר רציונלי גדול מ r וקטן מ $r+\varepsilon$.
2. נראה שאוסף נקודות ההצטברות של $(0,1)$ הוא הקבוצה $[0,1]$.

אמנם,לכל $a\in(0,1)$ הסדרה $\left\{a+\frac{1-a}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מוכלת ב$(0,1)\setminus\{a\}$ ומתכנסת ל a. מהתבוננות בגבול הסדרות $\left\{1-\frac{1}{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ניתן להסיק שגם הנקודות $0,1$ הינן נקודות הצטברות של $(0,1)$. לבסוף, לכל $r\in\mathbb{R}$ כך ש $1<r$ או $r<0$, r **לא** נקודת הצטברות של $(0,1)$. שכן לא ניתן לבנות סדרה ב $(0,1)$ שתתכנס ל r כזה. (ידוע מאינפי' שאם $0<x_n<1$ ו $x_n\underset{n\to\infty}{\to}a$ אזי $0\le a\le1$).

מש"ל

שאלה 2

יהי X מ"מ ותהי $S\subseteq X$ תת קבוצה ו- $x\in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

א. $x\in S-S'$ (הפרש קבוצות).
ב. קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B(x,\varepsilon)\bigcap S=\{x\}$.
ג. לכל סדרה $S\subseteq\{x_n\}$, אם $x_n\to x$ אזי $\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

פתרון

א $\Leftarrow$ב: $x\notin S'$. כלומר x אינה נקודת הצטברות של S. מכאן קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B(x,\varepsilon)\setminus\{x\}\bigcap S=\varnothing$. $x\in S$ עפ"י הנתון וכמו כן $x\in B(x,\varepsilon)$. מכאן, $\{x\}\subseteq B(x,\varepsilon)\bigcap S$. נניח בשלילה שקיים $y\neq x\in B(x,\varepsilon)\bigcap S$. נקבל ש $y\in B(x,\varepsilon)\setminus\{x\}\bigcap S$. אך זוהי סתירה לכך ש $B(x,\varepsilon)\setminus\{x\}\bigcap S=\varnothing$. בסה"כ נקבל ש $B(x,\varepsilon)\bigcap S=\{x\}$ כדרוש.

ב $\Leftarrow$ג: תהי $S\subseteq\{x_n\}$ ונניח ש $x_n\to x$. עפ"י סעיף ב' קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B(x,\varepsilon)\bigcap S=\{x\}$. מהגדרת הגבול קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ $x_n\in B(x,\varepsilon)$. מכיון ש $\{x_n\}\subseteq S$ נקבל שלכל $n\geq n_0$ $x_n\in B(x,\varepsilon)\bigcap S=\{x\}$. מכאן לכל $n\geq n_0$ $x_n=x$.

ג$\Leftarrow$א: נניח בשלילה ש $x\in S'$. כלומר x נקודת הצטברות של S. מכאן, קימת סדרה $\{x_n\}\subseteq S\setminus\{x\}$ כך ש $x_n\to x$. עפ"י הנתון בסעיף ג' קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ $x_n=x$, בסתירה לכך ש $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq S\setminus\{x\}$.

מש"ל

שאלה 3

א. יהי X מ"מ שלם ותהי A תת קבוצה סגורה של X. הוכיחו ש- A תת מרחב מטרי שלם.
ב. יהי X מ"מ ו- $A\subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם של X. הראו ש- A תת קבוצה סגורה של X.

פתרון

א. ניקח סדרת קושי ב-A : $\{x_n\} \subseteq A$. נרצה להראות שהסדרה מתכנסת לנקודה ב-A. כעת, $\{x_n\}$ היא סדרת קושי ב-X ומכיוון ש-X שלם, קיים $x \in X$ כך ש-$x_n \to x$. בגלל ש-A סגורה היא מכילה את נקודות הגבול של הסדרות המתכנסות שלה, ולכן $x \in A$.

ב. על מנת להראות ש-A סגורה נראה שהיא מכילה את כל נקודות הגבול שלה. תהי $\{x_n\} \subseteq A$ סדרה מתכנסת ל-$x \in X$. נרצה להראות ש-$x \in A$. אמנם, $\{x_n\}$ היא סדרה מתכנסת ולכן סדרת קושי. מכיוון ש-A שלם נקבל ש-$x_n \to y \in A$. כעת, X מרחב מטרי ולכן גבול הסדרה הוא יחיד ולכן $x = y$ ונסיק הדרוש.

מש"ל

שאלה 4

נסמן ב-A' את אוסף נקודות ההצטברות של A; נסמן ב-A'' את אוסף נקודות ההצטברות של A' וכן הלאה.

יהי (X,d) מ"מ, תהי $\{x_n\}$ סדרה שכל איבריה שונים המתכנסת ל-$x \in X \setminus A$ כאשר $A = \{x_n\}$.

א. מצאו את A', A''.

ב. האם A קומפקטי?

ג. האם $A \cup \{x\}$ קומפקטי? נמקו את תשובתכם אך ורק באמצעות הגדרת הקומפקטיות דרך **כיסוים פתוחים**!

פתרון

א. טענה: $A' = \{x\}$. תחילה, ברור ש-$\{x\} \subseteq A'$ (שכן יש סדרה מתוך $A \setminus \{x\}$ המתכנסת ל-x). נראה ש-$A' \subseteq \{x\}$. נניח בשלילה שקיימת נקודה $x \neq y \in A'$. נסמן $\varepsilon = d(x,y)$. מתקיים

$B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varnothing$. אכן, אם $z \in B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ אז

$d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ בסתירה להגדרת ε. מכיוון ש-y היא

נקודת הצטברות, קיימת סדרה $A \supseteq \{y_n\}$ שכל איבריה שונים המתכנסת ל- y. כלומר, עבור ה- ε שהגדרנו קודם, קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $y_n \in B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$. כעת, מכיון ש- $x_n \to x$ קיים n_1 כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים $x_n \in B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right)$. כלומר, פרט למספר סופי של איברים, כל איברי הקבוצה A נמצאים בסביבת $\frac{\varepsilon}{2}$ של x. מכיון ש $\{y_n\}$ אינסופית נסיק מהנ"ל שקיים איבר בחיתוך $B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ בסתירה לכך ש $B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varnothing$.

לגבי A'': מכיון ש-A' סופית, איך לה נקודות הצטברות ולכן $A'' = \varnothing$.

ב. כזכור, מרחב מטרי הוא קומפקטי אמ"מ לכל קבוצה אינסופית יש נקודת הצטברות. A תת קבוצה אינסופית של המרחב A, תת המרחב המטרי של (X,d), ללא נקודות הצטברות בתת המרחב המטרי (A,d) (למה?) לכן A אינו קומפקטי.

ג. $A \bigcup \{x\}$ קומפקטי. נוכיח באמצעות כיסויים. יהי $\{U_i\}_{i \in I}$ כיסוי פתוח של $A \bigcup \{x\}$, ונראה שקיים לו תת כיסוי סופי. קיים i_0 כך ש- $x \in U_{i_0}$. מכיוון ש- $x_n \to x$, קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $x_n \in U_{i_0}$. כעת, לכל $j \in \{1,2,3,...,n_0-1\}$ קיים U_{i_j} כך ש- $x_i \in U_{i_j}$. לכן תת הכיסוי הסופי הדרוש הוא $\{U_{i_1},U_{i_2},...,U_{i_{n_0-1}},U_{i_0}\}$.

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

יהי X מ"מ ויהי Y אוסף אינסופי בן מניה של נקודות מתוך X, כך שלכל שתי נקודות שונות $a,b \in Y$ מתקיים $2 \geq d(a,b) \geq 1$. הוכיחו:

א. Y סגור וחסום ב- X.
ב. האם Y תת מרחב קומפקטי (ביחס למטריקת תת המרחב)?

<u>פתרון</u>

א. ברור ש- Y חסום (לפי ההגדרה); נראה שהוא סגור. תהי $\{x_n\} \subseteq Y$ כך ש- $x_n \to x \in X$ ונראה ש- $x \in Y$. אם $x_n \to x \in X$ אזי לכל $\varepsilon > 0$,

ובפרט עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$, קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $x_n \in B\left(x, \frac{1}{2}\right)$.

לכן, לכל $n_1, n_2 \ge n_0$ מתקיים $x_{n_1}, x_{n_2} \in B\left(x, \frac{1}{2}\right)$ ולכן $d\left(x_{n_1}, x_{n_2}\right) < 1$,

ואם הנקודות שונות, אזי $1 \le d\left(x_{n_1}, x_{n_2}\right) < 1$ וזאת סתירה. לכן $x_{n_1} = x_{n_2}$.

כלומר, כל סדרה מתכנסת מתוך Y היא קבועה לבסוף, ולכן $x \in Y$.

ב. המרחב אינו קומפקטי. נשים לב ש- $\left\{B\left(a, \frac{1}{2}\right)\right\}_{a \in Y}$ הוא כיסוי פתוח של Y שאין לו תת כיסוי סופי (שכן, למעשה, כל איבר בכיסוי מכיל נקודה אחת בדיוק מתוך Y).

[דרך נוספת: נשים לב ש- Y הוא מרחב דיסקרטי (מדוע?) ולכן קומפקטי אמ"מ סופי.]

מש"ל

<u>**שאלה 6**</u>

<u>בתרגיל זה תוכיחו כי כל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.</u>

יהי (X,d) מ"מ. נגדיר שתי מטריקות על X: $\tilde{d}, \rho$.

$$\rho(x,y) = \min\{d(x,y),1\} \quad , \quad \tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$ לכל $x, y \in X$.

א. (רשות – כי יש את הפתרון בקורס של אינפי' 3) הוכיחו כי אלה אכן מטריקות.

ב. הוכיחו כי המטריקות הן חסומות (את זה אכן עוד לא עשיתם ☺).

<u>הערה</u>: מטריקה ρ נקראת "חסומה" אם קיים $r > 0$ כך שלכל x, y מתקיים $\rho(x,y) \le r$ (שקול להגדרות שניתנו בתרגול האחרון).

ג. הוכיחו כי d, $\tilde{d}$ ו- ρ שקולות.

<u>פתרון</u>

נוכיח רק סעיפים ב',ג'.

<u>סעיף ב'</u>

המטריקה $\tilde{d}$ חסומה שכן $\tilde{d}(x,y)\le 1$ לכל $x,y\in X$, וכנ"ל לגבי $\rho(x,y)$.

<u>סעיף ג'</u>

נוכיח רק את השקילות של $d,\tilde{d}$:

נניח $\{x_n\}\xrightarrow{d}x$. נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{d}(x_n,x)=\lim_{n\to\infty}\frac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)}=\frac{0}{1+0}=0\Rightarrow\{x_n\}\xrightarrow{\tilde{d}}x.$$

מצד שני $d(x,y)=\dfrac{\tilde{d}(x,y)}{1-\tilde{d}(x,y)}$. לכן אם $\{y_n\}\xrightarrow{\tilde{d}}y$ נקבל

$\lim_{n\to\infty}d(y_n,y)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\tilde{d}(y_n,y)}{1-\tilde{d}(y_n,y)}=\dfrac{0}{1-0}=0\Rightarrow\{y_n\}\xrightarrow{d}y$. לכן המטריקות שקולות.

מש"ל

<u>שאלת אתגר</u> (לא להגשה)

היזכרו במרחב שהגדרנו בתרגיל הראשון:

נסמן ב- X את אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,...,n\}$. נגדיר את הפונקציה הבאה: $d:X\times X\to[0,\infty)$ על ידי:

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \dfrac{1}{\min\{j\in\mathbb{N}:x_j\neq y_j\}} & x\neq y\end{cases}.$$

בעבר הוכחתם ש- d היא אכן מטריקה. הוכיחו כעת כי המרחב הוא קומפקטי.

<u>פתרון</u>

נוכיח שלכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת ומכאן המרחב קומפקטי. תהי $\left(y^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ סדרה ב- X (מכיון שכל איבר בסדרה הוא בעצמו סדרה שרכיביה

באים מתוך $\{1,2,...,n\}$. נסמן $\left(y^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ כאשר $y^{(k)}{}_m$ מייצג את הרכיב ה- m של האיבר בסדרה שיכול לקבל n ערכים). מכיון שיש רק מספר סופי של ערכים אפשריים שסדרת "הרכיב הראשון" $\left(y^{(k)}{}_1\right)_{k\in\mathbb{N}}$ יכולה לקבל (למעשה n ערכים) קיים בהכרח $a_1\in\{1,2,...,n\}$ שמופיע אינסוף פעמים ב- $\left(y^{(k)}{}_1\right)_{k\in\mathbb{N}}$. נבחר a_1 כזה. יהי $k_1\in\mathbb{N}$ האינדקס הראשון שבו מופיע a_1 ב- $\left(y^{(k)}{}_1\right)_{k\in\mathbb{N}}$. נתבונן כעת ב $\left(y^{(k)}{}_2\right)_{k\in\mathbb{N}}$. הקבוצה $I=\left\{l>k_1 : y^{(l)}{}_1=a_1\right\}$ אינסופית עפ"י השלב הקודם ולכן משיקולים דומים קיים $a_2\in\{1,2,\ldots n\}$ כך שקיימת $J\subseteq I$ אינסופית עבורה מתקיים $\forall k\in J \quad y^{(k)}{}_2=a_2$. ל- J קיים איבר מינימלי שבהכרח גדול מ- k_1 ונסמנו k_2 . נשים לב שמתקיים $y^{(k_1)}{}_1=y^{(k_2)}{}_1=a_1,\ y^{(k_2)}{}_2=a_2$. ניתן להמשיך כך בצורה אינדוקטיבית ולהגדיר איברים $a_m\in\{1,\ldots n\}$ לכל $m\in\mathbb{N}$ וכך לבנות סדרת אינדקסים עולה $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ שתקבע תת סדרה $\left(y^{(k_m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ כך שלכל $m\in\mathbb{N}$ מתקיים $y^{(k_m)}{}_m=a_m$ וגם $y^{(k_m)}{}_l=a_l$ לכל $l\le m$. אנו טוענים ש $y^{(k_m)}\xrightarrow{m\to\infty}a=(a_1,a_2,\ldots)$. אכן, לכל $m\in\mathbb{N}$ $d\left(y^{(k_m)},a\right)\le\frac{1}{m+1}$.זה נובע מכך ש- m הרכיבים הראשונים של $y^{(k_m)},a$ זהים (עפ"י הבניה של תת הסדרה). מכאן $0\le d\left(y^{(k_m)},a\right)\le\frac{1}{m+1}$ ועפ"י משפט הסנדביץ' נקבל הדרוש.

מש"ל