תרגול 6 סדרות מונוטוניות ותתי סדרות

4 בדצמבר 2019

הגדרה:

סדרה a_n נקראת מונוטונית עולה אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$ והיא נקראת מונוטונית יורדת אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \leq a_n$.

דוגמאות:

1) $a_n = n$

מתקיים: $a_{n+1} = n + 1 \geq n = a_n$ ולכן זו סדרה מונוטונית עולה.

2) $a_n = \frac{1}{n}$

מתקיים: $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = a_n$ ולכן זו סדרה מונוטונית יורדת.

3) $a_n = 2 - \frac{1}{n}$

מתקיים: $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} \geq 2 - \frac{1}{n} = a_n$ ולכן זו סדרה מונוטונית עולה.

משפט:

א) סדרה מונוטונית עולה (יורדת) וחסומה מלעיל (מלרע) מתכנסת וגבולה הוא החסם העליון (התחתון)

ב) סדרה מונוטונית עולה (יורדת) שאינה חסומה מלעיל (מלרע) מתכנסת במובן הרחב לאינסוף (מינוס אינסוף)

הערה:

המשפט נותן לנו עוד טכניקה לחישוב גבולות

דוגמאות:

1) $a_n = n$ היא מונוטונית עולה ואינה חסומה מלעיל ולכן מתכנסת במובן הרחב לאיסוף.

2) $a_n = \frac{1}{n}$ היא מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ע"י 0 כי כל האיברים שלה חיוביים ולכן מתכנסת. בנוסף, ראינו שחסם התחתון של הסדרה הוא 0 ולכן הוא גם הגבול.

3) $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ זו סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל על ידי 2 ולכן מתכנסת, בנוסף החסם העליון שלה הוא 2 (הוכיחו) ולכן הוא גם הגבול.

מסקנה:

א) לכל סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל מתקיים: $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$

ב) לכל סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע מתקיים: $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$

הערה:

שיטות לבדיקת מונוטוניות:

1) נתבונן בביטוי: $a_{n+1} - a_n$

אם $a_{n+1} - a_n \geq 0$ אזי הסדרה מונוטונית עולה

אם $a_{n+1} - a_n \leq 0$ אזי הסדרה היא מונוטונית יורדת

2) אם $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$, נתבונן בביטוי $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ אזי הסדרה היא מונוטונית עולה

אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אזי הסדרה היא מונוטונית יורדת

תרגיל:

הוכיחו שהסדרה הבאה מתכנסת: $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{3n}$

פתרון:

נראה התכנסות על ידי כך שנוכיח שהסדרה היא מונוטונית וחסומה ומזה נסיק שהיא מתכנסת.

נתבונן בביטוי: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3(n+1)} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - ... - \frac{1}{3n} =$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - ... - \frac{1}{3n} =$$

$$= \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n} \leq \frac{3}{3n+1} - \frac{3}{3n} < \frac{3}{3n} - \frac{3}{3n} = 0$$

ולכן הסדרה היא מונוטונית יורדת.

הסדרה היא חסומה מלרע על ידי 0 כי לכל n טבעי $a_n > 0$ ולכן מתכנסת.

תרגיל:

מצאו את גבול הסדרה $a_n = \frac{3^n}{2^{n^2}}$

פתרון:

נראה שהסדרה היא מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת.

נתבונן בביטוי $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{3^{n+1}}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{3^n}{2^{n^2}}}=\frac{2^{n^2}}{2^{n^2+2n+1}}\cdot\frac{3^{n+1}}{3^n}=\frac{2^{n^2}}{2^{n^2}\cdot 2^{2n+1}}\cdot\frac{3^n\cdot 3}{3^n}=\frac{3}{2^{2n+1}}\leq 1$ לכל n טבעי

ולכן הסדרה היא מונוטונית יורדת.

גם היא חסומה מלרע על ידי אפס כי כל האיברים שלה חיוביים ולכן מתכנסת.

תרגיל:

נתון: $a_1=5$, $a_{n+1}=a_n\cdot\frac{6+a_n}{3+2a_n}$הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

הערה:

הסדרה הזו נתונה על ידי כלל נסיגה, בתרגיל הזה נלמד טכניקה נחמדה איך לחשב גבולות של סדרות מתכנסות מהסוג הזה.

פתרון:

קודם כל נוכיח שהסדרה מתכנסת כל ידי כך שנראה שהיא מונוטונית וחסומה ורק לאחר מכן נחשב את גבולה.

נראה קודם שהסדרה היא חסומה. כאן קל לראות שהיא חסומה מלרע על ידי 0 כי כל האיברים שלה מספרים חיוביים,

אבל אני טוענת שאפשר לשפר את החסם הזה ולהראות שהסדרה חסומה מלרע על ידי 3.

נוכיח באינדוקציה שהסדרה חסומה מלרע על ידי 3:

$n=1$: $a_1=5\geq 3$ (לפי הנתון)

נניח את נכונות הטענה עבור n כלומר נניח שמתקיים: $a_n\geq 3$

ונוכיח עבור $n+1$, כלומר צריך להוכיח ש: $a_{n+1}\geq 3$

$a_{n+1}=a_n\cdot\frac{6+a_n}{3+2a_n}\geq 3\Leftrightarrow a_n(6+a_n)\geq 9+6a_n\Leftrightarrow 6a_n+a_n^2\geq 9+6a_n$ $\Leftrightarrow a_n^2\geq 9\Leftrightarrow a_n\geq 3$ וזה נכון לפי הנחת האינדוקציה.

נוכיח שהסדרה מונוטונית יורדת:

צ"ל: $a_{n+1}\leq a_n$

הוכחה:

$a_{n+1}=a_n\cdot\frac{6+a_n}{3+2a_n}\leq a_n\cdot 1=a_n$

הסבר:

מתקיים $\frac{6+a_n}{3+2a_n} \leq 1$ אם ורק אם $6+a_n \leq 3+2a_n$ אם ורק אם $a_n \geq 3$ וזה נכון לכל n טבעי (הוכחנו שהסדרה היא חסומה מלרע על ידי 3)

סיכום:

הוכחנו שהסדרה היא מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ולכן מתכנסת, כלומר קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

נחשב את L:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{6+a_n}{3+2a_n} =$$
$$= \lim a_n \cdot \lim \frac{6+a_n}{3+2a_n} = L \cdot \frac{\lim 6+a_n}{\lim 3+2a_n} = L \cdot \frac{6+L}{3+2L}$$

הס"כ קיבלנו את המשוואה הבאה: $L = L \cdot \frac{6+L}{3+2L}$ נפתור אותה ונמצא את L.

נשים לב ש־$L > 0$ כי הסדרה חסומה מלרע על ידי 0 ולכן אפשר לחלק ב־L

קיבלנו: $\frac{6+L}{3+2L} = 1$ נעשה מכנה משותף ונבודד את L, יוצא ש־$L = 3$

כלומר הסדרה מתכנסת וגבולה הוא 3

תתי סדרות

הגדרות:

1) תהי a_n סדרה של מספרים ממשיים ותכי n_k סדרה עולה של מספרים טבעיים $(n_1 < n_2 < n_3 < ....)$. הסדרה a_{n_k} נקראת תת סדרה של a_n

דוגמה:

ניקח סדרה $a_n = \frac{1}{n}$ ונתבונן בתתי סדרות שונות שלה:

$n_k = 2k$ ואז נקבל $a_{2k} = \frac{1}{2k}$ קיבלנו תת סדרה של כל איברי a_n שנמצאים במקומות הזוגיים, כלומר:

$$(a_{2k}) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, ...$$

$n_k = 2k-1$ ואז נקבל $(a_{2k-1}) = (\frac{1}{2k-1}) = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, ...$ כלומר קיבלנו תת סדרה של כל האברים שנמצאים במקומות האי זוגיים

$n_k = 3k$ ואז נקבל $a_{3k} = \frac{1}{3k}$ וקיבלנו תת סדרה של כל איברי a_n שנמצאים במקומות שמתחלקים ב־3 ללא שארית, כלומר:

$$(a_{n_k}) = (a_{3k}) = \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, ...$$

2) אם תת סדרה a_{n_k} מתכנסת ל־L, נאמר ש־L הוא גבול חלקי של הסדרה a_n.

דוגמה:

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ is even} \\ 0 & n \text{ is odd} \end{cases}$$

$n_k = 2k$ ואז נקבל $a_{n_k} = a_{2k} = 1$ וז סדרה קבועה של אחדים ולכן גבולה הוא 1 ,

כלומר 1 הוא גבול חלקי של a_n

$n_k = 2k-1$ ואז נקבל $a_{n_k} = a_{2k-1} = 0$ וזו סדרה קבועה של אפסים ולכן שואפת ל־0 ולכן גבול חלקי נוסף של a_n הוא 0 .

3) $\limsup a_n$ הוא הגבול החלקי הגדול ביותר של a_n , $\liminf a_n$ הוא הגבול החלקי הקטן ביותר של a_n

נחזור לדוגמה הקודמת:

$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ is even} \\ 0 & n \text{ is odd} \end{cases}$, לסדרה רק שני גבולות חלקיים 0 ו־1 , הגבול בינהם הוא 1 ולכן $\limsup a_n = 1$, והקטן בינהם הוא 0 ולכן $\liminf a_n = 0$

טענה שימושית:

תהי a_n סדרה, ונניח $a_{2k} \to L$, $a_{2k-1} \to M$ ולכן אלה הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה.

במילים אחרות, אם סדרת הזוגיים שואפת ל־L וסדרת האי זוגיים שואפת ל־M, אזי אין גבולות חלקיים אחרים חוץ מ־M ו־L.

דוגמה:

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה: $a_n = \frac{5^n + (-5)^n}{4^n}$ וציינו מה הם $\limsup a_n$ ו־$\liminf a_n$

פתרון:

כאשר $n_k = 2k$ נקבל $a_{n_k} = a_{2k} = \frac{5^{2k} + (-5)^{2k}}{4^{2k}} = 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{2k} \to \infty$

כאשר $n_k = 2k-1$ נקבל $a_{n_k} = a_{2k-1} = \frac{0}{4^{2k-1}} = 0$

קיבלנו שלסדרה יש שני גבולות חלקיים ולכן לפי הטענה הקודמת אין גבולות חלקיים נוספים חוץ מאלה ולכן מתקיים:

$\limsup a_n = \infty$, $\liminf a_n = 0$

משפט חשוב

נאמר שהסדרה a_n מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n$

כלומר הסדרה מתכנסת אם ורק אם יש לה גבול חלקי אחד וכל תת סידרה שלה מתכנסת לאותו הגבול

הערה:

המשפט נותן לנו עוד שיטה להפריך את קיום הגבול, כלומר אם מצאנו שתי תתי סדרות שמתכנסות לגבולות שונים אזי הסדרה אינה מתכנסת.

דוגמה קודמת:

$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ is even} \\ 0 & n \text{ is odd} \end{cases}$ ראינו שלסדרה יש שני גבולות חלקיים 0 ו־1 ולכן הסדרה אינה מתכנסת.

תרגיל:

הוכיחו כי הסדרה $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ לא מתכנסת.

נבחר $n_k = 4k$ ולכן $a_{n_k} = a_{4k} = \sin\left(\frac{4\pi k}{2}\right) = \sin(2\pi k) = 0, 0, 0, \ldots$ קיבלנו סדרה קבועה של אפסים ולכן מתכנסת לאפס.

נבחר $n_k = 4k + 1$ ולכן $a_{n_k} = a_{4k+1} = \sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = 1, 1, 1\ldots$ קיבלנו סדרה קבועה של אחדים ולכן מתכנסת לאחד

לסדרה יש לפחות שני גבולות חלקיים שונים ולכן אינה מתכנסת.

תרגיל:

מצאו והוכיחו מה הגבול העליון והתחתון של הסדרות הבאות:

1) $a_n = 2^n$

פתרון:

a_n זו סדרה ששואפת לאינסוף ולכן כל תת סדרה שלה שואפת לאינסוף ומתקיים $\liminf a_n = \limsup a_n = \infty$

2) $a_n = -5n$

פתרון:

זו סדרה ששואפת ל$-\infty$ ולכן $\limsup a_n = \liminf a_n = -\infty$

3) $a_n = (-1)^n \cdot n$

פתרון:

אם $n_k = 2k$ אזי $a_{n_k} = 2k \to \infty$

אם $n_k = 2k - 1$ אזי $a_{n_k} = -(2k-1) \to -\infty$

ולכן לפי הטענה שימושית אלה הגבולות החלקיים היחידים שלה

ומתקיים $\limsup a_n = \infty$, $\liminf a_n = -\infty$

תרגיל:

מצאו והוכיחו מה הגבול העליון והתחתון של $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

פתרון:

אם $n_k = 4k - 1$ נקבל $a_{n_k} = \sin(2\pi k - \frac{\pi}{2}) = -1, -1, -1, ...$ סדרה קבועה ששואפת ל־1

וראינו שעבור $n_k = 4k + 1$ נקבל $a_{n_k} = \sin(2\pi k + \frac{\pi}{2}) = 1, 1, ...$ סדרה קבועה ששואפת ל־-1

נזכר ש־$|\sin(x)| \leq 1$ ולכן כל גבול חלקי נוסף $L \neq \pm 1$ בהכרח מקיים $1 > L > -1$ ולכן

$\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$

תרגיל:

תהי $a_n = (-1)^n\left(5 + \frac{1}{n}\right)$. מצאו $\liminf a_n$, $\limsup a_n$, $\sup a_n$, $\inf a_n$

פתרון:

אם $n_k = 2k$ אזי $a_{n_k} = a_{2k} = 5 + \frac{1}{2k} \to 5$

אם $n_k = 2k - 1$ אזי $a_{n_k} = a_{2k-1} = -5 - \frac{1}{2k-1} \to -5$

לפי טענה שימושית, אלה הגבולות היחידים ולכן מתקיים:

$\limsup a_n = 5$, $\liminf a_n = -5$

כדי למצוא את האינפימום והסופרמום נסתכל על האיברים של הסדרה:

$\left\{-6, 5 + \frac{1}{2}, -5 - \frac{1}{3}, 5 + \frac{1}{4}, ...\right\}$ מכאן קל לראות שהאיברים החיוביים זו סדרה שמתחילה ב־$5\frac{1}{2}$ ויורדת ל־5 , והשליליים זו סדרה עולה שמתחילה ב־-6 ועולה ל־-5

ולכן $\sup a_n = 5\frac{1}{2}$, $\inf a_n = -6$ הוכחה פורצמאלית: תרגיל בית.

תרגיל:

תהי a_n סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 1$. מה ניתן לומר על הגבולות החלקיים של a_n?

פתרון:

תהי a_{n_k} תת סדרה של a_n שמתכנסת לגבול L, אזי $a_{n_k}^2$ זו תת סדרה של a_n^2. לפי הנתון a_n^2 מתכנסת ל־1 ולכן כל תת סדרה שלה מתכנסת ל־1 כלומר מתקיים:

$\lim_{n\to\infty} a_{n_k}^2 = L^2 = 1$ כלומר $L = \pm 1$ ולכן אלה האופציות היחידות עבור הגבולות החלקיים.

תרגיל:

תהי a_n סדרה חיובית מונוטונית עולה.

הוכיחו/הפריכו: $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

פתרון:

הפרכה: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, אז $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1-\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n}}$ מתכנסת ל־1 ובפרט הגבול העליון שלה הוא 1