תרגול 3

1. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות קבעו אם היא פונקציית ליפשיץ ואם כן, מה המקדם שלה:

(א) פונקצית ההטלה על רכיב i, $P_i : (l_\infty, d_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ שמוגדרת ע"י $P_i((x_n)) = x_i$. פתרון: נוכיח שהיא פונקציית ליפשיץ עבור $k = 1$.

$$|P_i((x_n)) - P_i((x_n))| = |x_i - y_i| \le \sup_n |x_n - y_n| = d_\infty(x, y)$$

(ב) פונקציה אפינית $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ שמוגדרת ע"י $\varphi_{a,b}(x) := ax + b$. פתרון: זו פונקציית ליפשיץ עם מקדם $|a|$. אכן מתקיים:

$$\|\varphi_{a,b}(x) - \varphi_{a,b}(y)\| = \|ax + b - ay + b\| = \|a(x - y)\| = |a|\|x - y\|$$

(ג) פונקציית השורש $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י $f(x) := \sqrt{x}$. פתרון: זו לא פונקציית ליפשיץ. לכל $a > 0$ אפשר לבחור את $x = 0$ ו־$y = \frac{1}{a^2}$ ואז:

$$|f(x) - f(y)| = |0 - \frac{1}{a}| = \frac{1}{a} = a|x - y|$$

2. (אולי יופיע בש"ב): יהי (X, d) מרחב מטרי, ו־$A \subseteq X$. אזי $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י $f_A(x) = d(x, A)$ רציפה. הסיקו מכאן:

(א) הנורמה היא פונקציה רציפה

(ב) כדור סגור הוא סגור, וכדור פתוח הוא פתוח

3. קבעו עבור כל קבוצה האם היא סגורה והאם היא פתוחה:

(א) $A = \{(x, y) : xy < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ פתרון: זו קבוצה פתוחה כתמונה הפוכה של $(\infty, 1)$ תחת ההעתקה הרציפה $f(x, y) := x \cdot y$. קל לראות שהיא אינה סגורה לדוגמה בגלל הסדרה $(1, 1 - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$.

(ב) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ביחס למטריקה ה־p־אדית. פתרון: זו קבוצה פתוחה וסגורה (סגוחה) כתמונה הפוכה של $[-\infty, 1]$ וגם $(\infty, 1.5)$ תחת פונקציית הנורמה ה־p־אדית. בעצם $\mathbb{Z} = B[0, 1] = B(0, 1.5)$.

(ג) $F \setminus \mathbb{R}^n$ כאשר F קבוצה סופית. פתרון: זו קבוצה פתוחה כתמונה הפוכה של $(0,\infty)$ תחת הפונקציה $f(x) := \min_{y\in F} d(x,y)$. אפשר גם לראות שהיא פתוחה כי המשלים שלה סופי ולכן סגור. קל לראות שהיא אינה סגורה כי המשלים שלה סופי ולכן לא מכיל אף קטע פתוח.

(ד) $C \setminus \mathbb{R}^n$ כאשר C קבוצה בת מניה. פתרון: זו לאו דווקא קבוצה פתוחה או סגורה. לדוגמה עבור $C := \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ הנקודה $0 \in \mathbb{R}^n \setminus C$ אבל כל סביבה שלה חותכת את C ולכן זו לא קבוצה פתוחה. ההבדל מהסעיף הקודם הוא שעבור הפונקציה $f(x) := \inf_{y\in C} d(x,y)$ יש נקודות $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ כך ש־$f(x) = 0$. היא גם אף פעם לא קבוצה סגורה (כי המשלים שלה בן מניה ולכן לא יכול להכיל אף קטע פתוח).

(ה) $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ (כלומר קבוצת המטריצות ההפיכות). פתרון: נסתכל על פונקצית הדטרמיננטה $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ שמוגדרת על כפולינום ולכן רציפה. מתקיים $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0)$.

4. הוכיחו שבמרחב מטרי כל קבוצה סגורה היא G_δ. הסיקו שכל קבוצה פתוחה היא F_σ פתרון: תהי $A \subseteq X$ קבוצה סגורה. נגדיר $f_A(x) := d(x,A)$. ראינו כבר שזו פונקציה רציפה. בנוסף, לפי משפט מהכיתה $A = f_A^{-1}(\{0\})$. נשים לב ש־ $\{0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ ולכן

$$A = f_A^{-1}(\{0\}) = f_A^{-1}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_A^{-1}((-\frac{1}{n},\frac{1}{n}))$$

בגלל ש־f_A פונקציה רציפה, התמונה ההפוכה של קבוצה פתוחה היא פתוחה ולכן זה חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות.

5. במרחב l_∞ ניקח את תת הקבוצה A של כל הסדרות שמתאפסות לבסוף.

$$A = \{(x_n) \in l_\infty : \exists n_0, \forall m > n_0, x_m = 0\}$$

מהו $cl(A)$? כיצד תשובתכם תשתנה אם נסתכל על $A \subseteq l_p$ עבור $1 \le p < \infty$?

פתרון

$$cl(A) = \{(x_n) \in l_\infty : x_n \to 0\} := B$$

במילים: כל הסדרות (x_n) המקימות $\lim_x x_n = 0$. (שימו לב שהדרישה שהסדרה שייכת ל l_∞ מיותרת, כי ידוע שכל סדרה מתכנסת חסומה) .

הוכחה: נוכיח ע"י הכלה דו כיוונית.

$\supseteq$: תהי x סדרה שמתכנסת ל־0. נסמן

$$x = (x_1, x_2, x_3, ...)$$

נרצאה להוכיח שהיא שייכת ל־$cl(A)$. לפי משפט היינה $cl(A) = scl(A)$ ולכן נרצה למצוא סדרה של סדרות שמתאפסות לבסוף, ששואפת לx. נגדיר את הסדרה של הסדרות באופן הבא:

$$a^1 = (x_1, 0, 0, ...)$$

$$a^2 = (x_1, x_2, 0, 0, ...)$$

$$a^3 = (x_1, x_2, x_3, 0, 0, , ...)$$

ובאופן כללי: a^n שווה ל n איברים הראשונים של x, ואח"כ אפסים. הסדרה הזאת מקיימת: $d(a^n, x) = \sup_{n<k} |x_k| \to 0$ ת מכיוון ש$x_n \to 0$.
$\subseteq$: תהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in cl(A)$, נראה ש־$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in B$ כלומר שהיא סדרה מתכנסת לאפס. יהי $\varepsilon > 0$. לפי הגדרת הסגור, קיימת $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in A$ כך ש־

$$d_\infty(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \leq \varepsilon$$

לפי ההגדרה של A קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־

$$\forall n_0 \leq n : y_n = 0$$

לכן,

$$\forall n_0 \leq n : |x_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_n - y_k| + 0 = d_\infty(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \leq \varepsilon$$

לפי הגדרה, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ שואפת ל־0, כרצוי.

אם נסתכל על $A \subseteq l_p$ אז מתקיים $cl(A) = l_p$. כדי לראות את זה מספיק לראות ש־$l_p \subseteq cl(A)$ (כי ההכלה ההפוכה טריוויאלית). יהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$ ו־$\varepsilon > 0$. אנחנו צריכים למצוא $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in A$ כך ש־$d_p(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \leq \varepsilon$. לפי ההגדרה של l_p מתקיים $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty$. לפי קריטריון קושי להתכנסות טורים, קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^p \leq \varepsilon^p \Rightarrow \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

נגדיר

$$y_n := \begin{cases} x_n & n \leq n_0 \\ 0 & n > n_0 \end{cases}$$

ברור ש־$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in A$ וגם קל לראות ש־$d_p(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \leq \varepsilon$, כרצוי.

6. הוכיחו שההגדרות הבאות ל $cl(A)$ שקולות:
   (א) $cl(A) = \{x : d(x, A) = 0\}$
   (ב) הקבוצה הסגורה הכי קטנה שמכילה את A. $cl(A) = \cap_{A\subseteq S} S$, כאשר $A \subseteq S$ סגורה. (שימו לב שמכיוון שחיתוך של קבוצות סגורות היא קבוצה סגורה, הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את A מתקבלת ע"י חיתוך כל הקבוצות הסגורות שמכילות את A.)

   <u>פתרון:</u>

נוכיח ע"י הכלה דו כיוונית. לצורך נוחות, נסמן: $Y = \{x : d(x,A) = 0\}\, , Z = \cap_{A\subseteq S} S$

$Z \subseteq Y$: לצורך כך מספיק להוכיח כי Y סגורה. (מכיוון שZ מוכלת בכל הקבוצות הסגורות שמכילות את A).

ובכן, הפוקנציה $f_A : (X,d) \to \mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י

$$f_A(x) = d(x,A)$$

היא פונקציה רציפה (בש"ב). $Y = f_A^{-1}(\{0\})$, תמונה הפוכה של קבוצה סגורה, ולכן סגורה. לY סגורה ומכילה את A ולכן $Z \subseteq Y$.

מצד שני: יהא $x \in Y$ נראה כי $x \in S$ לכל $A \subseteq S$. אכן יש סדרה x_n כך ש $d(x_n,x) \leq \frac{1}{n}$ ולכן x_nשואפת ל x. לפי טענה קודמת $x \in S$.

7. A סגורה $\iff$ $A' \subseteq A$.

<u>פתרון:</u>

$\Leftarrow$ ידוע שאם A סגורה, אז היא מכילה את כל הגבולות של סדרות בתוכה.

$\Rightarrow$ נניח ש$A' \subseteq A$ ונוכיח שA סגורה. שקול להוכיח שA^c פתוחה. נניח בשלילה שA^c לא פתוחה. כלומר, קיים $x \in A^c$ כך שלכל $\epsilon > 0$, $B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$. ובכן, נבנה סדרה ב$A$ בעלת איברים שונים שמתכנסת לx בצורה רקורסיבית: נבחר $a \in A$. נסמן $x_1 = a$. כעת, נניח שהגדרנו את x_n. נסמן $r_n = \min\{\frac{1}{n}, d(x_n,x)\}$, ונגדיר את x_{n+1} להיות איבר כלשהו ב$B(x,r_n) \cap A$. מתקיים:

$$d(x_n,x) \leq \frac{1}{n} \to x$$

ולכן $x_n \to x$. בנוסף, לכל n, $d(x_{n+1},x) < d(x_n,x)$ ומכן באינדוקציה שלכל n $m > n$ $d(x_m,x) < d(x_n,x)$, לכן $x_m \neq x_n$. כלומר, מצאנו סדרה של איברים שונים שמתכנסת לx. סתירה.

8. הוכיחו שלכל קבוצה A, A' היא קבוצה סגורה.

<u>פתרון:</u>

לצורך כך נוכיח ש.$A" \subseteq A'$. ובכן, יהי $x \in A''$, ויהי $\epsilon > 0$. זה אומר שקיים $x \neq y \in A'$ כך ש$d(x,y) < \dfrac{\epsilon}{2}$. נסמן $r = d(x,y)$. מכיוון ש$y \in A'$, קיים $z \in A$ כך ש$d(z,y) < r$. מכאן ש$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \dfrac{\epsilon}{2} + r < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$. כמו כן, מכיוון ש$d(y,z) < d(x,y)$ נקבל ש$x \neq z$. לכן $x \in A'$.

9. לכל קבוצה $A \subseteq X$ במרחב מטרי נסמן $A^{(n)} := A''^{\cdots}$ (כלומר הנגזרת ה־n־ית). נסמן גם $A^{(0)} := A$. נגדיר אפילו $A^{(\omega)} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}$. דרגת קנטור בנדיקסון מוגדרת ע"י

$$cb(A) := \min\{n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \mid A^{(n)} = A^{(n+1)}\}$$

שימו לב שהיא לא תמיד קיימת. קבוצה היא מושלמת אם דרגת קנטור־בנדיקסון (Cantor Bendixon) שלה היא 0. מצאו תת קבוצות של $\mathbb{R}$ שמקימות את התנאים הבאים:

(א) קבוצה שהנגזרת השניה שלה היא קבוצה ריקה (אבל לא הראשונה) <u>פתרון:</u> אפשר לקחת את $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$.

(ב) קבוצה מושלמת לא ריקה פתרון: כל אחד מהבאים: קטע סגור, קטע פתוח, הקבוצה של מספרים שבפיתוח ה־3־נארי שלהם (בסיס 3) אין את הספרה 1.

(ג) קבוצה שדרגת קנטור בנדיקסון שלה היא 2 והנגזרת שלה אף פעם לא ריקה
פתרון: נגדיר $A := \{2^{-i} + 2^{-j} \mid i, j \in \mathbb{N}, i \leq j \subseteq \mathbb{R}\}$ ואז נבחר $[-1, 0] \cup A$.

(ד) קבוצה שדרגת קנטור בנדיקסון שלה היא ω. פתרון: נגדיר לכל $A_n := \{2^{-n} + \sum_{k=1}^{n} 2^{-i_k} \mid n < i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$. קל לראות שדרגת קנטור בנדיקסון של A_n היא $n+1$. בנוסף $d(A_n, A_m) > 0$ לכל $n \neq m$ ולכן

$$cb\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} cb(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} n+1 = \omega$$

(מוזמנים לבדוק את הטענה האחרונה בעצמכם).

העשרה (+ ספוילרים לתורת הקבוצות): ניתן להגדיר נגזרת עבור כל סודר. משפט קנטור בנדיקסון אומר שבמרחבים "נחמדים" מספיק, כל קבוצה ניתן לפירוק לקבוצה מושלמת וקבוצה בת מניה. זו הייתה המוטיבציה הראשונית של קנטור להתחיל לחקור את מה שהיום אנחנו קוראים לו תורת הקבוצות.

10. פתרו את המשוואה הבאה מעל $\overline{\mathbb{Z}}_p$:

(א) $2x = 1$ כאשר $p = 3$ פתרון: נסתכל על האיבר $z := \sum_{n\in\mathbb{N}} 3^n$. נשים לב ש־

$$3z = z - 1 \Rightarrow 2z = -1 \Rightarrow 2(z+1) = 2z + 2 = 2 - 1 = 1$$

כלומר $x := z + 1$ זה הפתרון הרצוי.

(ב) $x^2 = -7$ כאשר $p = 2$. פתרון:

ידוע מאינפי 2 ש־$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)!x^n}{4^n(n!)^2(2n-1)}$. לכן אם נעלה את הטור הזה בריבוע כל האיברים יצטמצמו ונשאר עם $1 + x$ (מוזמנים לבדוק). לו רק הטור הזה היה מתכנס מעל ה־p־אדים אז הוא היה הפתרון. נשים לב ש־$-7 = 1 + (-8)$. נחשב כעת את הנורמה ה-p־אדית של האיבר a_n בטור הזה:

$$|a_n|_2 = |\frac{-(2n)!2^n}{4^n(n!)^2(2n-1)}|_2 = |\frac{(2n)!2^n}{4^n(n!)^2}|_2 = |\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}|_2 = |\frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n(2^{\frac{n(n-2)}{8}})^2}|_2 = 2^{\frac{n(n-1)}{2} - n - \frac{n(n-2)}{2}} = 2^{-\frac{n}{2}} \to 0$$

לכן קל לראות שהטור הזה הוא סדרת קושי ולכן מתכנס בהשלמה ה־2־אדית.

11. לכל $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה הגרף שלה $G_f = \{(x, f(x))\}$ סגור ב $\mathbb{R}^2$.
פתרון:

נוכיח שG_f סגורה לגבולות. ובכן, תהא $(x_n, f(x_n)) \subseteq G_f$ סדרה שמתכנסת ל (x, y). מאינפי 3 ידוע שזה גורר התכנסות רכיב־רכיב. כלומר, $x_n \to x$ ו $f(x_n) \to y$. אבל מכיוון שf רציפה, נקבל: $f(x_n) \to f(x)$. מיחידות הגבול נובע: $y = f(x)$. כלומר, $(x, y) = (x, f(x)) \in G_f$. מש"ל.

12. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, כך ש$G_f$ סגורה. האם f רציפה?
<u>פתרון:</u>
לא בהכרח. ניקח לדוגמא את הפונקציה הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \frac{1}{x} & x\neq 0\end{cases}$$

כידוע,זאת לא פונקציה רציפה. כעת נראה כי הגרף של f סגור. ובכן, $G_f=\{(0,0)\}\cup\{(x,\frac{1}{x}):x\neq 0\}$. אחוד של קבוצות סגורות היא קבוצה סגורה, וכן כל קבוצה סופית סגורה, ולכן מספיק להוכיח שהקבוצה $\{(x,\frac{1}{x}):x\neq 0\}$ סגורה. ובכן, נגדיר את הפונקציה הבאה $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, ע"י $F(x,y)=xy$. זאת פונקציה רציפה מאינפי 3. כעת נשים לב שהקבוצה $\{(x,\frac{1}{x}):x\neq 0\}=F^{-1}\{1\}$, תמונה הפוכה של קבוצה סגורה ולכן סגורה.