אינפי 1 - תרגיל 7

1. הוכח/הפרך: $\sum a_n$ מתכנס, עבור הסדרות הבאות:

a. $a_n=-\frac{1}{n}$ עבור n שמתחלק ב3, ו $a_n=\frac{1}{n}$ אחרת. כלומר

$a_n=1,\frac{1}{2},\left(-\frac{1}{3}\right),\frac{1}{4},\frac{1}{5},\left(-\frac{1}{6}\right),\ldots$.

פתרון: נסתכל על זוגות האיברים $\frac{1}{2},\left(-\frac{1}{3}\right)$, $\frac{1}{5},\left(-\frac{1}{6}\right)$, $\frac{1}{8},\left(-\frac{1}{9}\right)$. נחשב את הסכום שלהם $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$. נסתכל על תת סדרה של סדרת הסכומים החלקיים: $S_{3N}=1+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\frac{1}{3N-2}+\frac{1}{3N-1}+\left(-\frac{1}{3N}\right)$ ולפי החישוב שעשינו נפשט את זה ל $S_{3N}=1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5\cdot 6}\ldots+\frac{1}{3N-2}+\frac{1}{(3N-1)3N}$ אבל אם נוריד את האיברים החיוביים מהצורה $\frac{1}{n(n+1)}$ נקבל ש $S_{3N}\geq 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{3N-2}$ אבל זה סכום חלקי של הסדרה $\sum\frac{1}{3N-2}$ והטור הזה מתבדר (כי $\sum\frac{1}{n}$ מתבדר) ולכן גם $S_{3N}\to\infty$ ולכן $\sum a_n$ מתבדר.

b. $a_n=-\frac{1}{n}$ עבור n זוגי, ו $a_n=\frac{1}{n^2}$ אחרת. כלומר

$a_n=1,\left(-\frac{1}{2}\right),\frac{1}{9},\left(-\frac{1}{4}\right),\frac{1}{25},\left(-\frac{1}{6}\right),\ldots$.

פתרון: ניקח את $b_n=0,\left(-\frac{1}{2}\right),0,\left(-\frac{1}{4}\right),0,\ldots$ ו $c_n=1,0,\frac{1}{9},0,\frac{1}{25},0,\ldots$. ברור ש $c_n\leq\frac{1}{n^2}$, ולכן לפי מבחן ההשוואה $\sum c_n$ מתכנס. נניח בשלילה ש $\sum a_n$ מתכנס, $b_n=a_n-c_n$ אזי $\sum b_n=\sum a_n-\sum c_n$. כלומר $\sum b_n$ מתכנס. אבל אז $-\frac{1}{2}\sum b_n=\sum\left(-\frac{1}{2}b_n\right)$ וזה טור חיובי שלפי למה שהזכרנו בכיתה שווה לטור $\sum\frac{1}{n}$ שמתבדר, בסתירה. (הלמה אומרת שהוספה של מספר סופי של אפסים בין כל שני איברים אינה משנה את סכום הטור).

c. $a_n=-\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}+1}$ עבור n זוגי, ו $a_n=\frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{2}}-1}$ אחרת.

פתרון: קודם כל נשים לב שהסדרה נראית כך $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\dots$

נסתכל על הזוגות $\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{\sqrt{n}+1-(\sqrt{n}-1)}{n-1}=\frac{2}{n-1}$. לכן הסכומים החלקיים הזוגיים שואפים לאינסוף, ולכן הטור מתבדר.

2. יהי טור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. נגדיר את סדרת ה"זנבות" של הטור $d_k=\sum_{n=k}^{\infty}a_n$. הוכח/הפרך:

a. אם טור מתכנס אזי סדרות הזנבות שלו מוגדרת ושואפת לאפס.

פתרון: נסמן ב S_n את סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, ונסמן ב D_n^k את סדרת הסכומים החלקיים של $d_k=\sum_{n=k}^{\infty}a_n$. לפי הנתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס ולכן לפי הגדרה $\lim_{n\to\infty}S_n=L$ עבור $L\in\mathbb{R}$ כלשהו.

נשים לב לכך ש $D_1^k=a_k, D_2^k=a_k+a_{k+1}, D_3^k=a_k+a_{k+1}+a_{k+2},\dots$

ובאופן כללי $D_n^k=a_k+\dots+a_{k+n}=a_1+\dots+a_{k-1}+a_k+\dots+a_{k+n}-(a_1+\dots+a_{k-1})=S_{k+n}-S_{k-1}$

לכן, עבור k מסויים, נחשב את הגבול של סדרת הסכומים החלקיים D_n^k של הטור $d_k=\sum_{n=k}^{\infty}a_n$:

$$\lim_{n\to\infty}D_n^k=\lim_{n\to\infty}S_{k+n}-S_{k-1}=L-S_{k-1}.$$

לכן כל "זנב" $d_k=\sum_{n=k}^{\infty}a_n=L-S_{k-1}$ מתכנס למספר ממשי, ולכן מוגדר. כלומר, כל סדרת הזנבות מוגדרת.

כעת, נחשב את גבול סדרת הזנבות $\lim_{k\to\infty}d_k=\lim_{k\to\infty}L-S_{k-1}=L-L=0$, כפי שרצינו.

b. אם סדרת הזנבות של הטור מוגדרת אזי היא שואפת לאפס.

פתרון: אם סדרת הזנבות מוגדרת אזי כל זנב $d_k=\sum_{n=k}^{\infty}a_n$ מתכנס, בפרט $d_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ כלומר הטור המקורי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. לכן לפי סעיף א' סדרת הזנבות שואפת לאפס

c. אם סדרת הזנבות מוגדרת אזי הטור מתכנס.

פתרון: ראה פתרון סעיף קודם.

הערה: זנב הטור הינו טור בעצמו. לכן סדרת הזנבות מוגדרת רק אם הטורים שהם הזנבות מתכנסים.

3. יהא הטור $\sum \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{\ln(n+1)}$. האם הטור מתכנס? האם הטור מתכנס בהחלט?

פתרון: נשים לב ש $\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ מחזורית עם מחזור 12. ונזכר בנוסחא $\cos(x-\pi)=-\cos(x)$ לכן

ניתן לחלק את הטור ל6 טורים $\sum\left[\frac{\cos\left(\frac{(12n-a-6)\pi}{6}\right)}{\ln(12n-a-6+1)}+\frac{\cos\left(\frac{(12n-a)\pi}{6}\right)}{\ln(12n-a+1)}\right]$ כאשר

$a=0,1,2,3,4,5$. אבל לכל a,

$$\cos\left(\frac{(12n-a-6)\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{(12n-a)\pi-6\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{(12n-a)\pi}{6}-\pi\right)=-\cos\left(\frac{(12n-a)\pi}{6}\right)$$

נסמן $r_a=\cos\left(\frac{(12n-a-6)\pi}{6}\right)$ (שימו לב ש r_a לא משתנה עבור ערכים שונים של n בזכות

המחזוריות), ולכן הטורים הם מהצורה $\sum\left[\frac{r_a}{\ln(12n-a-6+1)}-\frac{r_a}{\ln(12n-a+1)}\right]$ אבל זו

סדרה מונוטונית חיובית יורדת לאפס שכפלו אותה ב-1 לסירוגין. לכן לפי לייבניץ 6 הטורים האלה מתכנסים, ולכן גם הטור המקורי מתכנס.

המשך: הטור בהחלט הוא $\sum \frac{\left|\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right|}{\ln(n+1)}$ (כי ה $\ln$ חיובי בכל הטור). נאפס את כל האיברים פרט

ל $n=12k$ ונקבל טור חיובי קטן יותר $\sum\frac{1}{\ln(12k+1)}$ אבל זה טור ששואף לאינסוף (כי

$\ln(n+1)<n+1$ ולכן $\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}$) ולכן הטור הגדול יותר $\sum \frac{\left|\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right|}{\ln(n+1)}$ שואף לאינסוף,

כלומר הטור המקורי אינו מתכנס בהחלט.

4. יהי $x>0$. הוכח ש $\sum\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^n$ מתכנס ומצא את סכומו.

פתרון: $\frac{x}{1+x}=\frac{1+x-1}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$. נתון $x>0$ ולכן $\frac{x}{1+x}<1$ נסמן $q=\frac{x}{1+x}<1$ ולכן $\sum q^n$

מתכנס ולכן $x=\frac{x}{1+x-x}=\frac{\frac{x}{1+x}}{1-\frac{x}{1+x}}=\frac{q}{1-q}=\sum q^n=\sum\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^n$

5. (שאלה ממבחן של פרופ' זלצמן). בדוק את ההתכנסות וההתכנסות בהחלט של הטורים

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$

פתרון: נבדוק דבר ראשון התכנסות בהחלט, כלומר האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$ מתכנס. נסתכל על

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{3^{(n+1)^2}}{((n+1)!)^3}\frac{(n!)^3}{3^{n^2}}=\frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3}$. נוכיח באינדוקציה כי $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ לכל n.

עבור $n=1$ ברור. נניח נכון עבור n נוכיח עבור $n+1$:

$$\left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|=\frac{3^{2(n+1)+1}}{((n+1)+1)^3}=\frac{3^2 3^{2n+1}}{(n+1)^3+3(n+1)^2+3(n+1)+1}\geq$$

$$\geq\frac{3^2 3^{2n+1}}{(n+1)^3+3(n+1)^3+3(n+1)^3+(n+1)^3}=\frac{9}{8}\frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3}\geq\frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3}>1$$

(השלב האחרון לפי הנחת האינדוקציה)

לכן $|a_n|$ מונוטונית עולה וגדולה ממש מאפס ולכן בהכרח $\lim_{n\to\infty}|a_n|\neq 0$ ולכן $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ ולכן

למעשה הטור מתבדר לחלוטין.

חשוב! לא השתמשנו במבחן דלאמבר כי מהעובדה ש $\forall n:\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ לא נובע בהכרח $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$

.b $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n^2)}{n^{5/4}}$

פתרון: נבדוק התכנסות בהחלט. $\frac{1}{n^{5/4}}=\left|\frac{1}{n^{5/4}}\right|\le\left|\frac{\sin(n^2)}{n^{5/4}}\right|$. אבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ עבור $\alpha>1$ מתכנס כפי שראינו בכיתה (לפי מבחן העיבוי). במקרה שלנו $\alpha=\frac{5}{4}>1$ ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(n^2)}{n^{5/4}}\right|$ מתכנס. בסיכום הטור שלנו מתכנס בהחלט (ולכן כמובן גם מתכנס)

.c $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(\log n)^2}$

פתרון: נבדוק אם הטור מתכנס בהחלט $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^2}$. קל לראות ש $\frac{1}{(\log n)^2}$ מקיימת את תנאי מבחן העיבוי, ולכן הטור הנ"ל מתכנס אם"ם $\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{(\log(2^n))^2}$ מתכנס. אבל $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}\frac{1}{\log^2 2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{(n\log(2))^2}=\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{(\log(2^n))^2}$. קל להוכיח באינדוקציה שלכל $n\ge 2$ מתקיים $\frac{2^n}{n^2}\ge 1$ ולכן בפרט $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}\ne 0$ ולכן הטור מתבדר (ולכן הטור המקורי לא מתכנס בהחלט)

נמשיך לבדוק אם הטור מתכנס בתנאי: קל לראות ש $\frac{1}{(\log n)^2}$ מקיימת גם את תנאי משפט לייבניץ (אותם תנאים כמו משפט העיבוי) ולכן הטור $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(\log n)^2}$ מתכנס לפי משפט לייבניץ, כלומר זה טור מתכנס שאינו מתכנס בהחלט, לכן לפי הגדרה זהו טור מתכנס בתנאי

6. (שאלה ממבחן של פרופ' זלצמן). בדוק את ההתכנסות וההתכנסות בהחלט של הטורים

.a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

פתרון: דבר ראשון נבדוק התכנסות בהחלט. נפעיל את מבחן קושי

$\frac{1}{e}<1=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ לכן הטור מתכנס בהחלט.

.b $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{1}{n}$

פתרון: $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=\cos(0)=1\ne 0$ לכן $\lim_{n\to\infty}a_n\ne 0$ ולכן הטור מתבדר.

c. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

פתרון: דבר ראשון נבדוק התכנסות בהחלט, כלומר את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$. נסתכל על הסכומים החלקיים של הטור הזה :

$$S_1=\log\left(\frac{2}{1}\right)=\log 2-\log 1=\log 2$$
$$S_2=\log 2-\log 1+\log 3-\log 2=\log 3-\log 1=\log 3$$
$$S_3=\log 2-\log 1+\log 3-\log 2+\log 4-\log 3=\log 4$$
$$\vdots$$
$$S_n=\log(n+1)$$

לכן $\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$ ולכן הטור מתבדר, כלומר הטור המקורי אינו מתכנס בהחלט.

נמשיך, קל לוודא ש $\frac{n+1}{n}$ מונוטונית יורדת ושואפת ל-1 ולכן $\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ מונוטונית יורדת לאפס

ולכן לפי משפט לייבניץ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ מתכנס בתנאי.

7.

a. תהי a_n סדרה המקיימת $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ $\forall n:$. הוכח/הפרך: הטור $\sum a_n$ מתכנס.

הפרכה: נשים לב שהתנאי $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ $\forall n:$ שקול פשוט לכך שהסדרה $|a_n|$ מונוטונית יורדת ממש, בפרט היא יכולה לשאוף לכל מספר. למשל $a_n=L+\frac{1}{n}$ עבור $L>0$ (קל לוודא שסדרה זו מקיימת את תנאי השאלה). אבל $a_n\to L\neq 0$ ולכן הטור בהכרח מתבדר.

חשוב! בדוגמא שלנו $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{L}{L}=1$ כמו גם בדוגמא $a_n=\frac{1}{n}$.

b. תהי a_n סדרה המקיימת $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\le\alpha<1$ $\forall n:$. הוכח/הפרך: הטור $\sum a_n$ מתכנס.

הוכחה: נתון $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\le\alpha$ $\forall n:$ ולכן $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\le\alpha<1$ כלומר $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ לכן לפי משפט דלאמבר הטור $\sum|a_n|$ מתכנס, כלומר הטור המקורי מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

8. (שאלה ממבחן של פרופ' זלצמן) הוכח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם"ם קיים $C > 0$ כך שלכל סדרה b_n המקיימת $\forall n: |b_n| \le 1$ וגם $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \le C$

הוכחה:

$\Leftarrow$ נתון ש $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = C$ עבור $C \in \mathbb{R}$ כלשהו. לכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||b_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = C$.

$\Rightarrow$ נניח בשלילה ש $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר. מכיוון שהוא טור חיובי הוא מתבדר לאינסוף ולכן סדרת הסכומים החלקיים שלו שואפת לאינסוף, כלומר $S_n = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \to \infty$. לכן קיים n_0 כך ש $\sum_{i=1}^{n_0} |a_i| > C$.

נגדיר את הסדרה b_n באופן הבא:

$b_n = \begin{cases} \frac{|a_n|}{a_n} & n \le n_0 \\ 0 & n > n_0 \end{cases}$. קל לראות ש $|b_n| = \begin{cases} 1 & n \le n_0 \\ 0 & n > n_0 \end{cases}$ ולכן מתקיים $\forall n: |b_n| \le 1$. ברור גם ש $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ לכן b_n מקיימת את תנאי השאלה. אבל $a_n b_n = \begin{cases} a_n \frac{|a_n|}{a_n} & n \le n_0 \\ a_n \cdot 0 & n > n_0 \end{cases}$ ולכן

$$a_n b_n = \begin{cases} |a_n| & n \le n_0 \\ 0 & n > n_0 \end{cases}$$

ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{n_0} |a_n| > C$ בסתירה לנתון. הסתירה מוכיחה ש $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.