הרצאה 5

תזכורת: נתון שדה $\mathbb{F}$ הגדרנו מ"ו V

$+_V$, 0_V , $\cdot$

רשימות מוכללות - וקטורי עמודה/שורה, מטריצות

$\mathbb{F}_d[x]$ (פולינומים מדרגה $\le d$)

תמ"ו $W_1, W_2 \le V$ מגדירים:

$$W_1 \cap W_2 = \{v \in V \mid v \in W_1 ,\ v \in W_2\}$$

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 ,\ w_2 \in W_2\}$$

תזכורת לתמ"ו - $W \le V$:

(1) $0_V \in W$

(2) $\forall w_1, w_2 \in W ,\ \alpha \in \mathbb{F}:$ $w_1 + \alpha w_2 \in W$

$\forall w_1 \in W_1 ,\ w_2 \in W_2:$

$$\begin{cases} w_1 + 0 \in W_1 + W_2 \\ 0 + w_2 \in W_1 + W_2 \end{cases}$$

סכומים ישרים של תמ"ו

הגדרה: יהיו $W_1, W_2 \le V$ תמ"ו.

אומרים כי $W_1 \oplus W_2$ סכום ישר אם $W_1 \cap W_2 = 0$.

דוגמאות:

(1) $W_1 = \left\{\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R}\right\},\ W_2 = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R}\right\} \le V = \mathbb{R}^2$

$(V = W_1 + W_2)$ $V = W_1 \oplus W_2$:מתקיים

- $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$
- $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : y = 0 \ , \ x = 0 \right\} = \{0\}$

② $V = \mathbb{R}^3$

$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ w \\ z \end{bmatrix} : w, z \in \mathbb{R} \right\}$

מתקיים: $V = W_1 + W_2$:

- $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}}_{W_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}}_{W_2}$

האם זהו סכום ישר?

- $W_1 \cap W_2 \ni \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

לכן סכום ישר.

③ $V = \mathbb{R}^3$,

$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ y \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$

$W_1 + W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x+y \\ -x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \not\ni \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

לכן גם סכום ישר:

כל וקטור במישור הוא ניצב ל- W_2 לכן מתבצלה:

$y \in \mathbb{R}$ ... $x = \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$

[illegible] y [illegible]

אבל $v \in W_1$, הרי ש- $y=0$. לכן $v=0$.

כלומר: $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

<u>הערה</u>: אומרים כי הסכום W_1+W_2 ישר אם $W_1 \cap W_2 = 0$, ולאו דווקא צריך להתקיים ש- W_1+W_2 שווה למרחב הגדול בו עובדים.

(4) $V=\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : a+b+c=0 \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

מתקיים: $V = W_1 \oplus W_2$.

• <u>חיתוך</u>: יהי $v \in W_1 \cap W_2$, אזי, הוא מהצורה $v = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}$ $(v \in W_2)$ לאיזשהו $x \in \mathbb{R}$, אך מאחר

ו- $v \in W_1$ מתקיים: $3x=0 \Leftarrow x=0$

לכן $v=0$ ו- $W_1 \cap W_2 = 0$.

• <u>$V = W_1 + W_2$</u>:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{V} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2x-y-z}{3} \\ \frac{2y-x-z}{3} \\ \frac{2z-x-y}{3} \end{bmatrix}}_{\in W_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{x+y+z}{3} \\ \frac{x+y+z}{3} \\ \frac{x+y+z}{3} \end{bmatrix}}_{\in W_2}$$

V

טענה: יהיו $W_1,W_2 \le V$ תמ"ו. אז:

$$\boxed{\text{לכל } v\in V \text{ קיימת הצגה יחידה: } v=w_1+w_2 \text{ כאשר } w_1\in W_1,\ w_2\in W_2.} \Longleftrightarrow \boxed{V=W_1\oplus W_2}$$

(כלומר: $v=w_1+w_2=w_1'+w_2' \Rightarrow w_1=w_1',\ w_2=w_2'$.)

הסבר מילולי:

$V=W_1+W_2$: לכל $v\in V$ יש הצגה $v=w_1+w_2$.

$V=W_1\oplus W_2$: — " — יש הצגה יחידה — " —.

הוכחה:

$(\Leftarrow)$: נניח כי $V=W_1\oplus W_2$ ונוכיח את צד שמאל.

ראשית, לכל $v\in V$ קיימת לפחות הצגה אחת:

$(w_1\in W_1,\ w_2\in W_2)$ $\quad v=w_1+w_2$

(נובע מהגדרת הסכום הישר.)

נניח כי לפנינו שתי הצגות של v:

$w_1\in W_1,\ w_2\in W_2$: $\quad v=w_1+w_2$

$w_1'\in W_1,\ w_2'\in W_2$: $\quad v=w_1'+w_2'$

מחיסור המשוואות נקבל:

$$v-v=0=(w_1-w_1')+(w_2-w_2') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_1-w_1' = (w_2'-w_2$$

$\underbrace{w_1 - w_1'}_{\in W_1} = \underbrace{w_2' - w_2}_{\in W_2}$

כי נתון שהסכום ישר

לכן, $w_1 - w_1' \in W_1 \cap W_2 = 0 \Rightarrow w_1 = w_1'$

ובדומה: $w_2 = w_2'$

כלומר, לקחנו שתי הצגות של $v = w_1 + w_2$ והראינו שהן שוות ולכן הוכחנו את הטענה.

($\Leftarrow$): נניח את 3 שמאל ונוכיח כי הסכום ישר.

עלינו להראות: $V = W_1 + W_2$ ← ישירות מהנתון

$W_1 \cap W_2 = \{0\}$

נניח בשלילה כי: $\exists\ 0 \neq w \in W_1 \cap W_2$

אזי: $w = \overset{\in W_1}{w} + \overset{\in W_2}{0} = \overset{\in W_1}{0} + \overset{\in W_2}{w}$

מדובר בשתי הצגות שונות! – w כסכום של וקטור מ-W_1 ועוד וקטור מ-W_2!

קיבלנו סתירה לכך שאמרנו. כלומר $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ והסכום ישר, כנדרש.

מ.ש.ל.

<u>הערה/סימון</u>: אם $W_1, \dots, W_d \le V$ תמ"ו, אומרים כי: הסכום $W_1 \oplus \dots \oplus W_d$ <u>ישר</u> אם:

ישר.

• $W_1 \oplus W_2$ ישר.

- $(W_1 \oplus W_2) \oplus W_3$ ישר
- $(W_1 \oplus W_2 \oplus W_3) \oplus W_4$

עובדה: התכונה שהסכום ישר אינה תלויה בסדר המרחבים.

דוגמאות:

① $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},\ W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \right\},\ W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \right\} \leq \mathbb{R}^3$

- $W_1 \oplus W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$
- $(W_1 + W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3)$

$(W_1 \oplus W_2) \oplus W_3$

הסכום ישר:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\in W_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}}_{\in W_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}}_{\in W_3}$$

- $W_3 \cap (W_1 \oplus W_2) = 0$

② דוגמה לא ישרה:

$V = \mathbb{R}^2$

$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\},$

$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} y \\ 2y \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\},\ W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$

לכל שני מרחבים: $i, j \in \{1, 2, 3\}$ (שונים) הסכום: $(V =)\ W_i \oplus W_j$

ישר.

לא [illegible]! אך מקיים.

$$(W_1 \cap W_2 = 0, \quad W_1 \cap W_3 = 0, \quad W_2 \cap W_3 = 0)$$

אבל: $W_1 + W_2 + W_3$ לא ישר.

מכיוון ש-

$$\underset{\Downarrow}{W_3} \cap (\underbrace{W_1 \oplus W_2}) \neq 0$$

$$0 \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\overset{\Uparrow}{W_1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\overset{\Uparrow}{W_2}}$$

משפט: יהיו $W_1, \dots, W_d \le V$ תמ"ו. מתקיים:

$$\boxed{\begin{gathered}\text{לכל } v \in V \text{ קיימים } w_1 \in W_1, \dots, w_d \in W_d \\ \text{יחידים:} \\ v = w_1 + \dots + w_d .\end{gathered}} \iff \boxed{V = W_1 \oplus \dots \oplus W_d}$$

$$v = \underbrace{w_1'}_{\overset{\Uparrow}{W_1}} + \dots + \underbrace{w_d'}_{\overset{\Uparrow}{W_d}}$$

$$\Downarrow$$

$$w_1 = w_1'$$
$$\vdots$$
$$w_d = w_d'$$

סכום $V = W_1 + \dots + W_d$

ישר:
$$\begin{cases} W_1 \cap W_2 = 0 \\ W_3 \cap (W_1 \oplus W_2) = 0 \\ \vdots \\ W_d \cap (W_1 \oplus \dots \oplus W_{d-1}) = 0 \end{cases}$$

הוכחה: באינדוקציה על d.

$d=1$: $V = W_1 \iff$ לכל $v \in V$ קיים $w \in W_1$ יחיד: $v = w_1$.

$d+1$:

($\Leftarrow$) נניח כי $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{d+1}$.

צ״ל: קיימת הצגה יחידה $v = \overset{W_1}{\overset{\cup}{w_1}} + \cdots + \overset{W_{d+1}}{\overset{\cup}{w_{d+1}}}$.

קיימת הצגה אחת לפחות כי קפה $V = W_1 + \cdots + W_{d+1}$.
מדוע יחידה? נניח שיש שתי הצגות:

$$v = w_1 + \cdots + w_{d+1}$$
$$v = w_1' + \cdots + w_{d+1}'$$

מתקיים:

$$\underbrace{(w_1 - w_1') + \cdots + (w_d - w_d')}_{W_1 \oplus \cdots \oplus W_d} = \underbrace{w_{d+1}' - w_{d+1}}_{W_{d+1}}$$

מהנתון, $W_{d+1} \cap (W_1 \oplus \cdots \oplus W_d) = 0$ (כי $W_1 \oplus \cdots \oplus W_{d+1}$)

לכן: $\boxed{w_{d+1} = w_{d+1}'}$ וכן:

$$(w_1 - w_1') + \cdots + (w_d - w_d') = 0.$$
$$\Downarrow$$
$$w_1 + \cdots + w_d = w_1' + \cdots + w_d'$$

ולכן $\boxed{w_1 = w_1', \ldots, w_d = w_d'}$.

וזאת מהנחת האינדוקציה –
אם $W_1 \oplus \cdots \oplus W_d$ אז ההצגה לפירוק יחידה.

בסה״כ, קיבלנו:

הצגות: $v = w_1 + \dots + w_{d+1}$

$v = w_1' + \dots + w_{d+1}'$

שאלה. לכן הנחנו את יחידות ההצגה כנדרש.

($\Longrightarrow$) מניחים את יחידות ההצגה עבור $d+1$ וכו' להוכיח כי הסכום $V = W_1 + \dots + W_{d+1}$ ישר.

ראשית, מדוע $V = W_1 + \dots + W_{d+1}$? מהנחת צד שמאל.
כלומר יש להוכיח כי הסכום ישר.

מכיוון שיש יחידות הצגה לפי $W_1, \dots, W_{d+1}$ [מהנחת צד שמאל!],
בפרט יש יחידות הצגה לפי:
$W_1, \dots, W_d$.

לכן, מהנחת האינדוקציה:
$W_1 \oplus \dots \oplus W_d$ סכום ישר.

על מנת להראות כי הסכום של $d+1$ המרחבים ישר,
נותר לנו להראות:
$$W_{d+1} \cap (W_1 \oplus \dots \oplus W_d) = 0.$$

נניח בשלילה כי קיים:
$$0 \neq w \in W_{d+1} \cap (W_1 \oplus \dots \oplus W_d)$$

להלן שתי הצגות שונות של w:

$$w = \underbrace{0}_{W_1} + \dots + \underbrace{0}_{W_d} + \underbrace{w}_{W_{d+1}}$$

$$w = \underbrace{w}_{W_1 + \dots + W_d} + \underbrace{0}_{W_{d+1}}$$

$(w = w_1 + \dots + w_d)$

מצאנו 2 הצגות שונות:

בהצגה הראשונה, הרכיב מ-W_{d+1} היה $w \neq 0$;
ואילו בהצגה השנייה, הרכיב מ-W_{d+1} הוא 0.

אין סתירה ליחידות ההצגה. לכן:

$W_1 \oplus \cdots \oplus W_{d+1}$ ישר, כנדרש.
מ.ש.ל.

15:55

פרישה - Span

הגדרה: יהי V מ"ו ותהי $X \subseteq V$ תת-קבוצה ($X \neq \emptyset$). המרחב הנפרש ע"י X:

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(X) := \{\underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n}_{\text{צירופים לינאריים של וקטורי } X} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}, \quad \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq X$$

הערה: מגדירים $\mathrm{Span}\,\emptyset := \{0\}$ מרחב האפס.

אומרים גם כי X פורשת את $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(X)$.

הערה: ניתן להגדיר $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(X)$ גם לקבוצה אינסופית אך משתמשים בסכומים סופיים בלבד.

לדוגמה: $X = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \ldots\}$

$$\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{2}{7}\sqrt{3}+\frac{8}{11}\sqrt{7} \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(X)$$

"$\cancel{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}+\cdots}$"

<u>טענה:</u> אם $X \subseteq V$ תת-קב' אזי $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(X) \leq V$.

<u>הוכחה:</u>

ראשית, נוכיח הכלה של קבוצות: $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(X) \subseteq V$.

באינדוקציה על n.

<u>$n=0$</u>: $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(\emptyset)=\{0\}\subseteq V$

<u>$n=1$</u>: $X=\{v\}$ אזי

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(X)=\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(\{v\})=\{\alpha v \mid \alpha\in\mathbb{F}\} \subseteq V$$

$\begin{cases} v\in V \\ \alpha\in\mathbb{F}\end{cases}$ ויש סגירות לכפל בסקלר.

<u>$n+1$</u>:

מהנחת האינדוקציה

$$\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_{n+1}v_{n+1}=\underbrace{(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n)}_{\in V}+\underbrace{\alpha_{n+1}v_{n+1}}_{\in V} \in V$$

כעת נותר להראות כי $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(X) \leq V$ תמ"ו:

(1) $0=0\cdot v_1+\cdots+0\cdot v_n \in \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(X)$

(2) יהיו:

$\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n \in \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(X)$

$\beta_1v_1+\cdots+\beta_nv_n \in \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(X)$

$\lambda\in\mathbb{F}$

אזי:

$$(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + \lambda(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) =$$
$$= (\alpha_1 + \lambda\beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n + \lambda\beta_n) v_n \in \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(X)$$

מ.ש.ל.

סימון:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i .$$

הגדרה: תהי (כמו) $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$. נגדיר:

מרחב העמודות של A

$$\operatorname{col}(A) = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{C_1(A), \dots, C_m(A)\} \leq \mathbb{F}^{n\times 1}$$

דוגמא:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} n=2 \\ m=3 \end{matrix}$$

$$\operatorname{col}(A) = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leq \mathbb{F}^{2\times 1}$$
$$= \left\{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{F} \right\}$$

דוגמא נוספת:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{col}(A) = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \lneq \mathbb{F}^{2\times 1}$$

בדומה, מגדירים את מרחב השורות:

$$\operatorname{Row}(A) = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{ -R_1(A)-, \dots, -R_n(A)- \} \leq \mathbb{F}^{1\times m}$$

$\mathbb{F}^n$

span

$$X=\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\subseteq \mathbb{F}^3 \quad ①$$

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(X)=\left\{\alpha_1\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\ \middle|\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}-\alpha_2\\\alpha_1\\2\alpha_1+\alpha_2\end{bmatrix}\ \middle|\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}t\\s\\-t+2s\end{bmatrix}\ \middle|\ t,s\in\mathbb{F}\right\}$$

אפשר גם:

$$\left\{\begin{bmatrix}t\\s\\-t+2s\end{bmatrix}\ \middle|\ t,s\in\mathbb{F}\right\}=\left\{t\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\ \middle|\ t,s\in\mathbb{F}\right\}$$

כלומר:

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}X=\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}.$$

$$X=\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}}_{e_1},\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}}_{e_2},\dots,\underbrace{\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}}_{e_n}\right\}\subseteq\mathbb{F}^n \quad ②$$

(וקטורי העמ' של מט' היחידה I_n)

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}X=\left\{\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\dots+\alpha_n\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\ \middle|\ \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{bmatrix}\ \middle|\ \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}\right\}=\mathbb{F}^n$$

כלומר: X פורשת את $\mathbb{F}^n$. (כלומר: $\mathbb{F}^n=\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}X$)

$$W=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\ \middle|\ x+y+z=0\right\}\subseteq\mathbb{F}^3 \quad ③$$

נטען כי: $W = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

$(\supseteq)$: ראינו כי אם $X \subseteq V$ אז $\operatorname{Span}_{\mathbb{F}} X \leq V$,
לכן מ״ש (מספיק להראות) כי: $X \subseteq W$.

אכן: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in W$ (בדיקה ישירה).

$(\subseteq)$: יהי $w \in W$. נסמן:

$$w = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad x+y+z=0$$

כדי להראות ש- $w \in \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ צריך להראות:

$$w = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ואכן:

$$w = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

שמשנו ה- Span הרגיל.

$$\left(\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \,\middle|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F} \right\} \text{ וזה: } \right)$$

טענה: תהא: $X = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{F}^n$.

יהי $u \in \mathbb{F}^n$. אז:

$\boxed{u \in \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(X)} \iff$ ש' פתרון למע׳:

$\begin{bmatrix} | & & | \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{u}$$

(במילים אחרות: $u \in Col\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix}$)

$$= Span_{\mathbb{F}}\{v_1, \ldots, v_m\} = Span_{\mathbb{F}}(X)$$

<u>הוכחה:</u>

$$u = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \underset{\uparrow}{=} \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$$

לפי כפל מט' בעמודה

מ.ש.ל.

<u>דוגמה:</u> האם $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in Span \underbrace{\left\{ \overset{v_1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}} \right\}}_{X}$?

שקול לבדוק האם יש פתרון למע':

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -3/2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow 2R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3/2 & -1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/2 & \vert & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + \frac{3}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \vert & 0 \\ 0 & 1 & \vert & 2 \\ 0 & 0 & \vert & 2 \end{bmatrix}$$

שורת סתירה,

משמע אין פתרון ולכן: $v \notin \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(X)$!

ומה לגבי $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$? מגנו״ $\vec{3}$.

מדרגים שוב את אותן פעולות דירוג על המט׳ $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \vert & w \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \vert & 0 \\ 0 & 1 & \vert & 2 \\ 0 & 0 & \vert & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vert & -1 \\ 0 & 1 & \vert & 2 \\ 0 & 0 & \vert & 0 \end{bmatrix}$$

ולכן:

$$w = -1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

טענה: תהא $X = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{F}^n$.

אזי $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}} X = \mathbb{F}^n \iff$ המט׳

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$$ הפיכה.

(שימו לב: זוהי מט׳ ריבועית.)

הוכחה: ראינו (לפני 2 שבועיים):

A הפיכה $\iff$ לכל $\underline{b}$ יש פתרון יחיד $A\underline{x}=\underline{b}$

$\Updownarrow$ מהטענה קודם

$$\boxed{\underline{b}\in Col(A) = Span_{\mathbb{F}}\{v_1,\dots,v_n\} = Span_{\mathbb{F}} X}$$

מ.ש.ל.

<u>בחזרה לדוגמה מתחילת ההרצאה</u>:

$$W_1=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} : x+y+z=0\right\},\quad W_2=\left\{\begin{bmatrix}x\\x\\x\end{bmatrix} : x\in\mathbb{R}\right\}\leq \mathbb{R}^3$$

ראינו כי $\mathbb{R}^3 = W_1\oplus W_2$.

איך מראים כי כל וקטור ב-$\mathbb{R}^3$ אכן ניתן להציג?

ראינו:

$$W_1 = Span_{\mathbb{F}}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

מצד שני:

$$W_2 = Span_{\mathbb{F}}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

לכן אפשר להשתמש בשיטה שלמדנו:

יהי וקטור כלשהו ב-$\mathbb{R}^3$: $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$, נגדיר:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\0&1&1&b\\-1&-1&1&c\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\0&1&1&b\\0&-1&2&a+c\end{array}\right]\to$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 3 & a+b+c \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+b+c}{3} \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-\frac{a+b+c}{3} \\ 0 & 1 & 0 & b-\frac{a+b+c}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+b+c}{3} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{2a-b-c}{3} \\ \frac{2b-a-c}{3} \\ \frac{a+b+c}{3} \end{bmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \left(\frac{2a-b-c}{3}\right)\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \left(\frac{2b-a-c}{3}\right)\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{a+b+c}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

כתבנו כל של וקטור כללי לפי וקטורי X.

נכתוב כסכום W_1+W_2:

$$= \begin{bmatrix} \frac{2a-b-c}{3} \\ \frac{2b-a-c}{3} \\ \frac{2c-a-b}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a+b+c}{3} \\ \frac{a+b+c}{3} \\ \frac{a+b+c}{3} \end{bmatrix}$$

אבל נשים לב שרצינו בדוגמה בתחילת ההרצאה, עכשיו יש לו הסבר.

תרגום פולינומים לוקטורים:

$$\{\overbrace{1+2x+x^2}^{p_1}, \overbrace{-2+x+2x^2}^{p_2}, \overbrace{2-x+x^2}^{p_3}\} : \mathbb{R}_2[x]$$

נבנה מט':

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ישירים כי הפוך הקלט.

לכן לכל פולינום $a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ יש: פתרון ל-

$$A\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$$

ולכן:

$$a+bx+cx^2=\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\alpha_3 p_3$$

כלומר $\mathbb{R}_2[x]=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{p_1,p_2,p_3\}$.

<u>הערה:</u> $X=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$

$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}X=\mathbb{R}^2$ ואולם לכל שני וקטורים מ-X:

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{v_1,v_2\}=\mathbb{R}^2$$

בהמשך הקורס נדבר על קבוצות <u>פורשות מינימליות</u>, שנקראות <u>בסיסים</u>.

<u>טענה:</u> יהי W מ"ו, ונניח:

$$V=\mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_k\}\leq W$$

$$U=\mathrm{Span}\{u_1,\dots,u_m\}\leq W$$

מתקיים:

$$\left\{\alpha_1v_1+\dots+\alpha_kv_k \;\middle|\; \begin{bmatrix}| & & | & | & & |\\ v_1 & \cdots & v_k & u_1 & \cdots & u_m\\ | & & | & | & & |\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\\ \alpha_{k+1}\\ \vdots\\ \alpha_{k+m}\end{bmatrix}=\vec{0}\right\}$$

$= V \cap U$

כלומר: כדי למצוא את $V \cap U$, נשתמש במרחב הפתרונות למע':

$$\begin{bmatrix} | & & | & | & & | \\ v_1 & \cdots & v_k & u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ \alpha_{k+m} \end{bmatrix} = 0$$

ניקח את וקטורי הפתרון לאחר k כניסות ונשתמש בצרף עמודות $v_1, \ldots, v_k$ עם מקדמים אלו:

<u>הוכחה:</u>

$(\supseteq)$ יהי $w \in V \cap U$, עלינו להראות כי w שייך לצו' שמצאנו.

מהנתון:

$$w = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k}_{\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}} = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m \in \mathrm{Span}\{u_1, \ldots, u_m\}$$

מתקיים:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + (-\beta_1) u_1 + \cdots + (-\beta_m) u_m = 0$$

כלומר:

$$\begin{bmatrix} | & & | & | & & | \\ v_1 & \cdots & v_k & u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ -\beta_1 \\ \vdots \\ -\beta_m \end{bmatrix} = \vec{0}$$

כלומר:

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

כאשר $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ מתקבלים [illegible]

[illegible] הנ״ל.

($\subseteq$) נניח כי $W=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_kv_k$ כאשר:

$$\begin{bmatrix} | & & | & | & & | \\ v_1 & \cdots & v_k & u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\\ \alpha_{k+1}\\ \vdots\\ \alpha_{k+m}\end{bmatrix}=\vec{0}$$

צ״ל: $W\in V\cap U$.

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_kv_k+\alpha_{k+1}u_1+\dots+\alpha_{k+m}u_m=0$$

$$w=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_kv_k=(-\alpha_{k+1})u_1+\dots+(-\alpha_{k+m})u_m$$

$$\mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_k\}=V \qquad \mathrm{Span}\{u_1,\dots,u_m\}=U$$

כלומר:

$$w\in V\cap U.$$

מ.ש.ל.

<u>דוגמה:</u> ב-$\mathbb{R}^3$, [illegible] מעל של:

$$W_1=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}\leq\mathbb{R}^3$$

$$W_2=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}\leq\mathbb{R}^3$$

כדי למצוא את הגרעין, נדרג מטריצה למצב המדורג:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow -R_3]{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \leftarrow R_1 - R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 - R_3}}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = t$$

$$x_3 = 2t, \quad x_2 = -t, \quad x_1 = -2t$$

פתרון כללי למצב המדורג:

$$\begin{bmatrix} -2t \\ -t \\ 2t \\ t \end{bmatrix}$$

וכן:

$$\begin{bmatrix} s \\ \frac{1}{2}s \\ -s \\ -\frac{1}{2}s \end{bmatrix}$$

כדי למצוא את התמונה:

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} s \\ -\frac{1}{2} s \\ s \end{bmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\} = \underbrace{\left(\left\{ \begin{bmatrix} 2s \\ -s \\ 2s \end{bmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\} \right)}$$

$$= \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$