<u>אנליזה 1 למורים- פתרון תרגיל 3</u>

דרכים לחישובי גבולות שניתן להתשמש בהם שראינו:

1. משפט הסנדויץ'
2. אפיסה כפול חסומה שווה אפיסה
3. הכפלה בצמוד
4. בהינתן סדרה מתכנסת $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אזי עבור $b>1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n{}^b = L^b$
5. עבור $a>0$ מתקיים: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

חשבו את הגבולות של הסדרת הבאות:

1. $$a_n = \left(\frac{6n^3-5n+7}{3n^3+n^2+1}\right)^4$$

<u>פתרון</u>

נחשב את הגבול של הסדרה $\frac{6n^3-5n+7}{3n^3+n^2+1}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^3-5n+7}{3n^3+n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3\left(6-\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3}\right)}{n^3\left(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(6-\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3}\right)}{\left(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}\right) = \frac{6}{3} = 2$$

ולכן מהטענה 4 הנ"ל נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^3-5n+7}{3n^3+n^2+1}\right)^4 = 2^4$$

2. $$a_n = \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)$$

<u>פתרון</u>

כדי לחשב את הגבול נכפיל בצמוד:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\left(n+5-n\right)}{\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}+\sqrt{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{\left(1+\frac{5}{n}\right)}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\left(\sqrt{\left(1+\frac{5}{n}\right)}+1\right)}=\frac{5}{2}$$

.3 $$a_n=\frac{(2n)!+(2n-1)!}{(2n)!+(2n+1)!}$$

<u>פתרון</u>

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!+(2n-1)!}{(2n)!+(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!\cdot(2n+1)}{(2n)!\cdot(1+2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!\cdot(2n+1)}{(2n-1)!\cdot 2n\cdot(1+2n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{2n\cdot(1+2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{4n^2+4n}=0$$

.4 $$a_n=\sqrt[n]{3^n+2^n}$$

<u>פתרון</u>

נשים לב כי מתקיים:

$$3^n\le 3^n+2^n\le 3^n+3^n$$

$$\sqrt[n]{3^n}\le\sqrt[n]{3^n+2^n}\le\sqrt[n]{2\cdot 3^n}$$

$$3\le\sqrt[n]{3^n+2^n}\le 3\cdot\sqrt[n]{2}$$

והרי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}3=3$$

$$\lim_{n\to\infty}3\cdot\sqrt[n]{2}=\lim_{n\to\infty}3\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=3\cdot 1=3$$

ולכן לפי משפט הסנדויץ' נקבל כי :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+2^n}=3$$

.5 $$a_n=\sqrt[n]{\frac{2n^2+1}{n^2}}$$

<u>פתרון</u>

נסתכל על הדבר בתוך השורש:

$$\frac{2n^2+1}{n^2}=\frac{2n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}=2+\frac{1}{n^2}$$

ולכן מתקיים: $2\le 2+\frac{1}{n^2}\le 3$.

ולכן: $\sqrt[n]{2}\le\sqrt[n]{2+\frac{1}{n^2}}\le\sqrt[n]{3}$.

והרי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$$

ולכן פי משפט הסנדויץ': $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n^2+1}{n^2}}=1$

6. $$a_n=\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$$

רמז: תשתמשו בשיטת הסנדויץ' ותמצאו את שתי הסדרות האחרות ע"י הגדלה והקטנת כל מכנה.

<u>פתרון</u>

נשים לב כי מתקיים:

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\le\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}=\frac{n+1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\ge\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}=\frac{n+1}{(2n)^2}=\frac{n+1}{4n^2}$$

ולכן נקבל:

$$\frac{n+1}{n^2}\le a_n\le\frac{n+1}{4n^2}$$

מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n^2}=0$$

ולכן פי משפט הסנדויץ': $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

.7 $a_n = \dfrac{2n+\sin(n)}{n+\cos(2n)}$

<u>פתרון</u>

נשים לב כי מתקיים: $-1 \le \sin(n) \le 1, -1 \le \cos(2n) \le 1$

ולכן כדי למצוא סדרה קטנה יותר נרצה להקטין את המונה ולהגדיל את המכנה וכדי למצוא סדרה גדולה יותר נרצה להקטין את המכנה ולהגדיל את המונה:

$$\frac{2n-1}{n+1} \le \frac{2n+\sin(n)}{n+\cos(2n)} \le \frac{2n+1}{n-1}$$

נשים לב כי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n-1} = 2$$

ולכן לפי משפט הסנדויץ': $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n+\sin(n)}{n+\cos(2n)} = 2$

.8 $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

רמז: $\dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdots\dfrac{2}{n} \le \dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{2}{3} = 2\cdot\dfrac{2^{n-2}}{3^{n-2}} = 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$

תשתמשו בשיטת הסנדויץ' .

<u>פתרון:</u>

לפי הרמז מתקיים: $0 \le \dfrac{2^n}{n!} \le 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$.

והרי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\lim_{n\to\infty}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 2\cdot 0 = 0$$

ולכן לפי משפטי הסנדויץ':

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

.9 $$a_n = \frac{2^n \cdot \cos(n)}{(2n)!}$$

רמז: תשמשו במה קיבלתם בסעיף הקודם ובמשפט הסנדויץ'.

<u>פתרון</u>

נשים לב כי מתקיים: $-1 \le \cos(n) \le 1$

ולכן מתקיים: $\frac{2^n \cdot (-1)}{(2n)!} \le \frac{2^n \cdot \cos(n)}{(2n)!} \le \frac{2^n \cdot (1)}{(2n)!}$

לפי הסעיף הקודם נקבל כי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot (-1)}{(2n)!} = -1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(2n)!} = -1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot (1)}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(2n)!} = 0$$

ולכן לפי משפט הסנדויץ': $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot \cos(n)}{(2n)!} = 0$

.10 $$a_n = \frac{\sin(n^2+1)}{n^2}$$

<u>פתרון:</u>

נסמן שתי סדרות:

$$b_n = \sin(n^2+1)$$

$$c_n = \frac{1}{n^2}$$

נשים לה כי b_n סדרה חסומה ו- $\lim_{n\leftarrow\infty} c_n = 0$

ולכן לפי משפט אפיסה כפול חסומה שווה אפיסה נקבל: $\lim_{n\leftarrow\infty} \frac{\sin(n^2+1)}{n^2} = 0$