שאלות ממבחנים חלק ב'

תשע"א מועד א'

שאלה 4

הוכח: $GL_n(\mathbb{Q})$ אינה פשוטה.

הוכחה

$SL_n(\mathbb{Q}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{Q})$ כי $SL_n(\mathbb{Q}) = \ker\varphi$ כאשר $\varphi : GL_n(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^*$ מוגדר ע"י $\varphi(A) := \det A$

הוכחה שנייה

המרכז תת"נ.
המרכז של $GL_n(\mathbb{Q})$ הוא $\{cI : c \in \mathbb{Q}^*\}$. המטריצות הסקלריות שאינן אפס.

שאלה 5

מצא את כל החבורות האבליות שיש להן 4 מחלקות צמידות.

פתרון

חב' G אבלית אם"ם לכל $x \in G$ $|\mathrm{conj}(x)| = 1$. לכן G אבלית עם 4 מחלקות צמידות $G \Leftarrow$ מסדר 4.
לפי המשפט היסודי לחבורות אבליות, חבורה אבלית איזומורפית למכפלה ישרה של ציקלית ולכן יש שתי חב' מסדר 4 עד כדי איזומורפיזם - $\mathbb{Z}_4$ ו$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

שאלה 6

הוכח או הפרך: <u>כל</u> חבורה מסדר

א) 26

ב) 27

ג) 28

פתירה.

תשובה

א) חב' מסדר $26 = 2 \cdot 13$ היא חבורה מסדר $2p$. לפי משפט כל חבורה מסדר pq, p, q ראשוניים, פתירה.

ב) $27 = 3^3$. חב' מסדר 27 היא חבורת-p. לפי משפט כל חבורת-p פתירה.

ג) $28 = 2^2 \cdot 27$. לפי משפט סילוא I/קושי יש בחב' מסדר 28 ת"ח H_7 מסדר 7. מס' ת"ח מסדר 7 מקיים $r_7|28$, $r_7 \equiv 1 \bmod 7$, $r_7 = 1 \Leftarrow$, ולכן ת"ח מסדר 7 היא נורמלית(אחרת ת"ח הצמודות לה מהוות ת"ח מסדר 7 נוספות).
קיבלנו סדרה $G \rhd H_7 \rhd \{e\}$ שגורמיה:

- $\mathbb{Z}_7 \cong {}^{H_7}/_{\{e\}}$ ולכן אבלית
- ${}^{G}/_{H_7}$ מסדר $4 = 2^2$ ולכן אבלית.

ומכאן פתירה.

שאלה 7

G חבורה מסדר 9 פועלת על X, $|X| = 4$. האם יש נק' שבת?

תשובה

$|X| = |X_0| + \sum_x |O(x)|$ כאשר X_0 נק. שבת. כאשר הסכום עובר על נציגי מסלולים מאורך 1.
לפי משפט, אורך מסלול מחלק את סדר החב', ולכן לכל $|O(x)|$ מתקיים $1 < |O(x)|$ וגם $|O(x)|\,|g|$

$\Leftarrow$ $3|\,|O(x)|$ לכל מסלול בסכום, ולכן $3|\sum_x |O(x)|$

$\Leftarrow$ $|X_0| \equiv |X| \bmod 3$

$\Leftarrow$ $|X_0| \equiv 1 \bmod 3$

$\Leftarrow$ $|X_0| \in \{1, 4\}$ ובפרט יש נק. שבת. ■

תשע"א מועד ב

שאלה 4

הוכח או הפרך: S_n נוצרת ע"י שני איברים.

תשובה

S_n נוצרת ע"י 2 איברים:

$$S_n = \langle (1,2), (1,2,...n) \rangle$$

הוכחה

נסמן $\sigma = (1, 2, ...n)$, $\tau = (1, 2)$

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (2, 3)$$

$$\sigma^2\tau\sigma^{-2} = (3, 4)$$

$$\sigma^i\tau\sigma^{-i} = (i + 1, i + 2)$$

קיבלנו את כל החילופים הסמוכים $\{(i, i + 1) : 1 \leq i < n\}$, כלומר את קבוצת יוצרי קוקסטר. הראינו בכיתה שהם יוצרים את S_n. $\blacksquare$

שאלה 5

חשב את כל סדרות ההרכב של החב' הדיהדרלית $I_2(3)$

תשובה

$$I_2(3) = \left\langle \sigma, \tau : \sigma^3 = e, \tau^2 = e, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \right\rangle$$

$I_2(3)$ חב' לא אבלית מסדר $2 \cdot 3 = 6$.

S_3 חב' לא אבלית מסדר $2 \cdot 3 = 6$

לפי משפט כל חבורה מסדר $2p$ איז' ל$\mathbb{Z}_{2p}$ או ל$I_2(p)$. מכיוון שS_3 אינה אבלית היא איז' ל$I_2(p)$.

$$S_3 = \langle (1, 2), (1, 2, 3) \rangle$$

$|\langle (1, 2, 3) \rangle| = 3$ כלומר מאינדקס 2 ולכן תח"נ.

לכן $S_3 \rhd \langle (1, 2, 3) \rangle \rhd \{e\}$ סדרה נורמלית. זו סדרת הרכב כי

$$S_3/\langle (1,2,3) \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\langle (1, 2, 3) \rangle \cong \mathbb{Z}_3$$

כל הגורמים פשוטים.

אין סדרה נורמלית אחרת כי ת"ח אחרת של S_3 הן מסדרים 2 או 3 ולכן ציקליות:

- ת"ח מסדר 3: $\langle (1, 2, 3) \rangle = \langle (1, 3, 2) \rangle$ כי $(1, 2, 3)^{-1} = (1, 3, 2)$
- ת"ח מסדר 2: $\langle (1, 2) \rangle$, $\langle (1, 3) \rangle$, $\langle (2, 3) \rangle$ אינן תח"נ (כי אינן נשמרות תחת הצמדה).

ולכן אין סדרת הרכב אחרת(כי אין תח"נ לS_3 פרט ל$A_3 = \langle (1, 2, 3) \rangle$

שאלה 6

הומומורפיזם $\varphi : G \to H$. הוכח או הפרך: $\mathrm{Im}\varphi \trianglelefteq H$

פתרון

לא נכון!

דוגמה: G ת"ח שאינה נורמלית של H, φ העתקת הזהות.

משנה אחרת

שאלה

$G \to \varphi: S_6$ אפימורפיזם. מיין G עד כדי איזומורפיזם.

פתרון

לפי משפט איז' I

$$S_6/_{\ker\varphi} \cong G$$

תמיד $\ker\varphi \trianglelefteq S_6$ ולכן $\ker\varphi$ איזומורפית ל$\{e\}$ או A_6 או S_6(לפי משפט אין אפשרויות נוספות).