אלגברה מופשטת 1 ־ תירגול 6

הערה 0.1 ראינו מסקנה ממשפט לגרנז:
עבור חבורה סופית G ואיבר $g \in G$ מתקיים $o(g) \mid |G|$. —האם הכיוון ההפוך נכון?
כלומר, אם $|G| = n$ ו $k|n$ אז האם יש איבר $a \in G$ מסדר k? לא!

דוגמא נגדית היא $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$, אמנם $|G| = 16$ ו$8|16$ אבל אין איבר מסדר 8!

נעיר שבחבורה **ציקלית** סופית $G =< a >$ זה **כן** מתקיים בעזרת נוסחת הקסם שראינו $o(a^t) = \dfrac{n}{(n,t)}$ (כאשר n זה סדר החבורה).

תת־חבורה נורמלית

הגדרה 0.2 תת חבורה $G \leq H$ נקראת **נורמלית ב G** אם לכל $g \in G$ מתקיים $gH = Hg$ ומסמנים $H \lhd G$.
או באופן שקול: לכל $g \in G$ מתקיים $gHg^{-1} = H$.
או באופן שקול: לכל $g \in G$ מתקיים $gHg^{-1} \subseteq H$.

דוגמאות

- $SL_n(\mathbb{R}) \lhd GL_n(\mathbb{R})$. (סגור להצמדה)
- $\langle(12)\rangle \leq S_3$זו **לא** ת"ח נורמלית! למשל $(23)H \neq H(23)$.
- $\langle\tau\rangle \leq D_n$ היא **לא** ת"ח נורמלית! כי $\sigma \langle\tau\rangle \neq \langle\tau\rangle \sigma$.
- בחבורה אבלית כל ת"ח היא נורמלית.

טענה 0.3 תהי $H \leq G$ ת"ח מאינדקס 2 . הוכיחו ש H היא נורמלית.

הוכחה: לפי הנתון ש $[G:H] = 2$יש רק 2 קוסטים ימניים ורק 2 קוסטים שמאליים.
H עצמה היא קוסט (גם ימני גם שמאלי), נשאר למצוא את השני.

לכל $a \notin H$ ברור ש $aH \neq H$ ולכן זהו הקוסט השמאלי השני, ובאותו אופן Ha הוא הקוסט הימני השני.
מכיוון שהקוסטים הם חלוקה של G אז $H \cup aH = G = H \cup Ha$, ומכיוון שזהו איחוד זר נקבל בהכרח ש $aH = Ha$. ∎

מסקנה 0.4 $\langle\sigma\rangle \lhd D_n$ כי לפי משפט לגרנז' $[D_n : \langle\sigma\rangle] = \frac{2n}{n} = 2$.

הערה 0.5 אם $K \leq H \leq G$ וK נורמלית בG אז K נורמלית בH.
אבל אם K נורמלית ב H אז לא בהכרח שהיא נורמלית בG!
למשל: $\langle\tau\rangle \lhd \langle\tau,\sigma^2\rangle \lhd D_4$ (אפשר להשתכנע בעזרת אינדקסים) אבל ראינו ש$\langle\tau\rangle$ היא לא נורמלית בD_n.

הגדרה 0.6 תהיינה $H, K \leq G$ תת־חבורות. נגדיר את המכפלה שלהם $HK = \{hk \,|\, h \in H,\, k \in K\}$.

טענה 0.7 אם H, K הן נורמליות בG אז $HK \lhd G$. –את זה תוכיחו בבית.
הראו שאם הן לא נורמליות אז HK היא אפילו לא תת־חבורה.

הוכחה: נקח את $\langle\tau\rangle, \langle\tau\sigma\rangle \leq D_3$ (שהן לא נורמליות).
נכפול:

$$\langle\tau\rangle\langle\tau\sigma\rangle = \{id, \tau\}\{id, \tau\sigma\} = \{id, \tau, \tau\sigma, \sigma\}$$

זו לא ת"ח! למשל כי σ נמצאת שם אבל σ^2 לא. ∎

הומומורפיזמים פונקציה $\varphi : G_1 \to G_2$ היא הומומו' אם היא שומרת על כפל.
הומומו' חח"ע נקרא מונומורפיזם או שיכון.
הומומו' על נקרא אפימורפיזם.
הומומו' חח"ע ועל נקרא איזומורפיזם.

<u>דוגמאות:</u>

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ המוגדר ע"י $x \mapsto e^x$. זהו מונומורפיזם.
- $det : GL_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^\times$. זהו אפימורפיזם.
- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ המוגדר ע"י $x \mapsto x$ זה **לא** הומומו'!

תכונות של הומומו'

- $\varphi(e_1)=e_2$.
- $\varphi(g^n)=\varphi(g)^n$.
- $\varphi(g^{-1})=\varphi(g)^{-1}$.
- $\ker\varphi=\{g\in G_1\,|\varphi(g)=e_2\}$ היא ת"ח נורמלית של G_1.
- $\mathrm{Im}\varphi=\varphi(G_1)$ היא ת"ח של G_2.
- לכל ת"ח $H\le G_1$, $\varphi(H)$ היא ת"ח של G_2.
- לכל $g\in G_1$: $o\left(\varphi(g)\right)\,|\,o(g)$.

הוכחה: לתכונה האחרונה
נסמן $o(g)=n$ ו $o\left(\varphi(g)\right)=m$ (צ"ל $m|n$).
$g^n=e_1$ נפעיל על זה את φ:

$$\varphi(g^n)=\varphi(g)^n=\varphi(e_1)=e_2$$

ולכן $m|n$. ■

טענה 0.8 יהי $\varphi:G_1\to G_2$ הומומו'.
אם G_1 אבלית אז $\mathrm{Im}\varphi$ אבלית.
אם G_1 צקלית אז $\mathrm{Im}\varphi$ ציקלית.

הוכחה: את החלק הראשון תעשו לבד. נוכיח את השני.
נניח $G_1=\langle a\rangle$, נטען ש $\mathrm{Im}\varphi=\langle\varphi(a)\rangle$.
נקח איבר כללי $x\in\mathrm{Im}\varphi$ אזי יש איבר $g\in G_1$ כך ש $\varphi(g)=x$.
מכיוון שG_1 צקלית אז $g=a^k$ לאיזשהי חזקה $k\in\mathbb{Z}$, ואז

$$x=\varphi(g)=\varphi(a^k)=\varphi(a)^k$$

כלומר ש $x\in\langle\varphi(a)\rangle$. ■

הערה 0.9 [–תרגיל]
הוכיחו או הפריכו:

1. קיים איזומורפיזם $f:(\mathbb{Q}^+,\cdot)\to(\mathbb{Q},+)$.

נניח בשלילה שקיים כזה. נשים לב ש$f(a^2)=f(a)+f(a)$...
נסמן $c=f(3)$, אזי $c=\frac{c}{2}+\frac{c}{2}$. מכיוון ש f היא על יש מקור ל$\frac{c}{2}$, נסמן אותו $f(x)=\frac{c}{2}$.
אזי $f(x^2)=f(x)+f(x)=c=f(3)$ אבל f חח"ע ולכן $x^2=3$. וזו סתירה כי לַ3 אין שורש ב$\mathbb{Q}$!

2. קיים אפימורפיזם (=הומומו' על) $f:H\to\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ כאשר $H=\langle 5\rangle\le\mathbb{R}^\times$.

נניח בשלילה שקיים כזה. H היא חבורה צקלית ולכן גם $\mathrm{Im}f$ היא צקלית.
אבל f היא על ולכן נקבל ש $\mathrm{Im}f=\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ צקלית- וזו סתירה!

3. קיים מונומורפיזם (=הומומו' חח"ע) $f:GL_2(\mathbb{Q})\to\mathbb{Q}^{10}$.

נניח בשלילה שקיים כזה. ונתבונן בצמצום $f:GL_2(\mathbb{Q})\to\mathrm{Im}f$ שהוא איזומורפיזם [להדגיש לסטודנטים את הרעיון, ולהסביר שזה בעצם שיכון].
$\mathrm{Im}f$ היא ת"ח של $\mathbb{Q}^{10}$ שהיא אבלית, ולכן התמונה היא חבורה אבלית. מה שמכריח ש $GL_2(\mathbb{Q})$ אבלית- וזו סתירה!