פתרון תרגיל מספר 6

1.א. נתון האינטגרל $\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$ כאשר $C: |z|=3$.

הפונקציה $f(z)=e^{2z}$ היא פונקציה שלמה, והנקודה $z=-1$ נמצאת בפנים של המעגל C. לכן לפי נוסחת קושי לנגזרת השלישית

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(-1) = \frac{2\pi i}{6} 8e^{-2} = \frac{8\pi}{3e^2} i$$

ב. נתון האינטגרל $\int_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}dz$ כאשר $C: |z|=4$.

ע"י פירוק לשברים חלקיים ניתן לקבל $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}\right)$. לכן

$$\int_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}dz = \frac{1}{2i}\int_C \frac{e^{zt}}{z-i}dz - \frac{1}{2i}\int_C \frac{e^{zt}}{z+i}dz.$$

לכל $t \in \mathbb{R}$ הפונקציה $f(z)=e^{zt}$ היא שלמה. הנקודות $z=i$ ו- $z=-i$ נמצאות בפנים של המעגל C, נשתמש בנוסחת קושי פעם לגבי הנקודה $z=i$ ופעם לגבי $z=-i$ ונקבל

$$\frac{1}{2i}\int_C \frac{e^{zt}}{z-i}dz = 2\pi i e^{it} \quad \text{ו-} \quad \frac{1}{2i}\int_C \frac{e^{zt}}{z+i}dz = 2\pi i e^{-it}.$$

לכן נקבל בסוף -

$$\int_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}dz = \frac{2\pi i}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) = 2\pi i \sin t.$$

ג. נתון האינטגרל $\int_C \frac{\sin z}{z^2-z}dz$ כאשר $C: |z-1|=2$.

ע"י פירוק לשברים חלקיים נקבל

$$\frac{1}{z^2-z} = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

כיוון שהנקודות $z=-1$ ו- $z=0$ נמצאות בתוך המעגל C ממשפט קושי נקבל

$$\int_C \frac{\sin z}{z^2-z}dz = \int_C \frac{\sin z}{z-1}dz - \int_C \frac{\sin z}{z}dz = 2\pi i \sin 1 - 2\pi i \sin 0 = 2\pi i \sin 1.$$

ד. נתון האינטגרל $\int_C \frac{\cos \pi z}{(z^2-1)^2}dz$ כאשר $C: |z-1|=1$.

הפונקציה $f(z) = \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ המכיל את C ואת הפנים של C. לכן

$$\int_C \frac{\cos \pi z}{(z^2-1)^2}dz = \int_C \frac{f(z)}{(z^2-1)^2}dz = 2\pi i f'(1).$$

כיוון ש-

$$f'(z) = \frac{(z+1)^2(-\pi \sin \pi z) - \cos \pi z \cdot 2(z+1)}{(z+1)^4}$$

נקבל $f'(1) = \frac{1}{4}$ ולכן

$$\int_C \frac{\cos \pi z}{(z^2-1)^2}dz = \frac{\pi i}{2}$$

ה. נתון האינטגרל

$$\int_C \frac{\sin^4 z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}dz$$

כאשר $C: \left|z-\frac{\pi}{2}\right| = 1$. כיוון שהנקודה $z = \frac{\pi}{2}$ נמצאת בתוך המעגל C, נקבל ממשפט קושי

$$\int_C \frac{\sin^4 z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}dz = \frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\sin^4 z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}.$$

כדי לחשב את הביטוי מימין נשתמש בזהויות טריגונומטריות

$$\sin^4 z = \frac{1}{4}\cos 4z - \cos 2z + \frac{3}{4}$$

לכן

$$\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\sin^4 z = \frac{1}{4}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\cos 4z - \frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\cos 2z = 4^{2n-1}(-1)^n \cos 4z - 2^{2n}(-1)^n \cos 2z$$

לכן האינטגרל שווה ל-

$$\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\sin^4 z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 4^{2n-1}(-1)^n \cos 4z - 2^{2n}(-1)^n \cos 2z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = (4^{2n-1}+2^{2n})(-1)^n$$

2. על פי נוסחת קושי

$$\int_C \frac{\exp(z^n)}{z}dz = 2\pi i \cdot e = 2\pi i$$

מצד שני, $\gamma(\theta) = e^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$ היא פרמטריזציה של הקו המכוון C:

$$\int_C \frac{\exp(z^n)}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{\exp(e^{in\theta})}{e^{i\theta}} ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} i\exp(e^{in\theta})d\theta.$$

לכן נקבל

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \exp(e^{in\theta})d\theta = \int_0^{2\pi} \exp(\cos n\theta + i\sin n\theta)d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos n\theta}(\cos(\sin n\theta) + i\sin(\sin n\theta)d\theta$$

מהמשוואת החלקים הממשיים והמדומים נקבל

$\int_0^{2\pi} e^{\cos n\theta}\cos(\sin n\theta)d\theta = 2\pi$ ו- $\int_0^{2\pi} e^{\cos n\theta}\sin(\sin n\theta)d\theta = 0$.

3. ע"פ נוסחת קושי מתקיים

$$\int_{C_r} \frac{f^2(z)}{iz}dz = 2\pi f^2(0)$$

כאשר $C_r: |z| = r$. כיוון ש-

$$f^2(z) = u^2(z) - v^2(z) + 2iu(z)v(z)$$

נקבל

$$\int_{C_r} \frac{u^2(z) - v^2(z) + 2iu(z)v(z)}{iz}dz = 2\pi\left(u^2(0) - v^2(0) + 2iu(0)v(0)\right) = 4\pi iu(0)v(0)$$

(כאשר נעשה שימוש בנתון $u^2(0) = v^2(0)$). כעת נשתמש בפרמטריזציה $z = re^{i\theta}$, $dz = ire^{i\theta}d\theta$:

$$4\pi iu(0)v(0) = \int_{C_r} \frac{u^2(z) - v^2(z) + 2iu(z)v(z)}{iz}dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{u^2(re^{i\theta}) - v^2(re^{i\theta}) + 2iu(re^{i\theta})v(re^{i\theta})}{ire^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} u^2(re^{i\theta}) - v^2(re^{i\theta})d\theta + \int_0^{2\pi} 2iu(re^{i\theta})v(re^{i\theta})d\theta$$

מהשוואת החלקים המדומים והממשיים נקבל

$$\int_0^{2\pi} u^2(re^{i\theta}) - v^2(re^{i\theta})d\theta = 0.$$