(1)

תזכורת: אם f היא פונקציה אנליטית בתוך
הסביבה $\{z \mid |z-\alpha|<r\} = D$ אז ל-f
יש פיתוח טיילור בעיגול סביב הנק' α

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)\,dw}{(w-\alpha)^{n+1}}$$

תרגיל: תהי f פונק' שלמה כך שלכל $z\in\mathbb{R}$
מתקיים $f(z)\in\mathbb{R}$. הוכיחו כי $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$

פתרון: נפתח את f לטור טיילור סביב $z=0$

אז, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$f(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\bar{z})^n$$

$$\overline{f(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n (\bar{z})^n$$

לכן כדי להוכיח ש- $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ צריך
להוכיח ש- $a_n = \bar{a}_n$. כלומר צריך להוכיח
ש- $a_n\in\mathbb{R}$ $\forall n\geq 0$

לפי הנוסחה $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ולכן צריך
להוכיח ש- $f^{(n)}(0)$ ממשי לכל $n\geq 0$

נוכיח. אפילו טענה חזקה יותר, נוכיח ש-$f^{(n)}(x)$ ממשי אם x ממשי. נוכיח זאת באינדוקציה על n.
אם $n=0$ אז $f(x)$ ממשי מהנתון. נניח שהטענה נכונה עבור $n=k-1$, כלומר מניחים ש-$f^{(k-1)}(x)$ ממשי אם x ממשי, כעת ניקח את הנגזרת של $f^{(k-1)}$ בכיוון של הציר הממשי (אפשר לקחת את הנגזרת באיזה כיוון שרוצים כי $f^{(k-1)}$ אנליטית) ונקבל

$$f^{(k)}(x) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t \text{ ממשי}}} \frac{f^{(k-1)}(x+t)-f^{(k-1)}(x)}{t}$$

לכן $f^{(k)}(x)$ הוא גבול של מספרים ממשיים ולכן היא גם מספר ממשי והוכחנו את הטענה.

__בעיה__: תהי f פונקציה שלמה המקיימת

$$|f(z)| \le M(1+|z|)^{4/5} \quad z\in\mathbb{C}$$

כאשר $0<M$ קבוע. הוכיחו ש-f קבועה.

__פתרון__: נפתח את f לטור טיילור סביב $z=0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{כאשר} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw$$

ו-C מעגל כלשהו ברדיוס r עם מרכז ב-$z=0$.

③ כעת ננסה למצוא הערכה למקדמים c_n:

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{|f(w)|}{|w|^{n+1}}|dw|$$

ל-C יש את הפרמטריזציה $C: w = re^{i\varphi}$ כאשר
$r > 0$ מספר חיובי, ולכן $dw = ire^{i\varphi}d\varphi$ וגם
וכן, $|dw| = r\,d\varphi$

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f(re^{i\varphi})|}{r^{n+1}}\,r\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f(re^{i\varphi})|}{r^n}\,d\varphi$$

כעת נשתמש בנתון $|f(z)| \le M(1+|z|)^{4/5}$

ולכן נקבל $|f(re^{i\varphi})| \le M(1+r)^{4/5}$

$$|c_n| \le \frac{M}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1+r)^{4/5}}{r^n}\,d\varphi = M\frac{(1+r)^{4/5}}{r^n} \xrightarrow[r\to\infty]{n\ge 1} 0$$

ולכן $c_n = 0$ לכל $n \ge 1$ ולכן f קבועה.

(4)

אפסים של פונקציה אנליטית

הגדרה: נקודה $a=z$ נקראת אפס של פונקציה $f=f(z)$ אם $f(a)=0$, ואם בנקודה $a=z$

$$f(a)=f'(a)=\dots=f^{(n-1)}(a)=0$$

ו- $f^{(n)}(a)\neq 0$ אז לנקודה $a=z$ קוראים אפס מסדר n של הפונקציה f.

באופן שקול $a=z$ הוא אפס מסדר n של הפונקציה האנליטית $f=f(z)$ אם ורק אם את f ניתן להציג כ-

$$f(z)=C_n(z-a)^n+C_n(z-a)^{n+1}+\dots$$
$$=(z-a)^n g(z)$$

כאשר g פונקציה אנליטית ו- $g(a)\neq 0$ (כלומר $C_n\neq 0$)

משפט: יהי f פונקציה אנליטית בתחום D. אם f לא שווה זהותית לאפס ואם $a=z$ הוא אפס של f אז הוא מסדר סופי, כלומר קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $f(z)=(z-a)^n g(z)$ ו- $g(a)\neq 0$

(כי אחרת ממשפט יחידות נקבל ש- f שווה זהותית לאפס)

(5) דוגמא: לפונק' $f(z)=1-\cos(z^2)$ יש אפס

בנק' $z=0$, נמצא את הסדר שלו

$$f(z)=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{4n}}{(2n)!}=\frac{z^4}{2!}-\frac{z^8}{4!}+\dots$$

לכן הסדר של $z=0$ הוא 4

דוגמא: לפונק' $f(z)=\sin(\pi e^{z-1})+\pi(z-1)$

יש אפס בנקודה $z=1$, נמצא את הסדר שלו

נגזור את f ונקבל

$$f'(z)=\pi e^{z-1}\cos(\pi e^{z-1})+\pi$$

נציב $z=1$ ונקבל $f'(1)=\pi-\pi=0$

נגזור את f פעם שניה ונקבל

$$f''(z)=\pi e^{z-1}\cos(\pi e^{z-1})-\pi^2 e^{2z-2}\sin(\pi e^{z-1})$$

לכן $f''(1)\neq 0$, ולכן ל-f יש אפס מסדר 2 בנק' $z=1$.

דוגמא: האם קיימת פונק' אנליטית f כך ש-$\sin(z)=f^2(z)$ בסביבה של הנקודה $z=0$?

פתרון: אם $\sin(z)=f^2(z)$ בסביבה של $z=0$ אז בפרט $0=\sin(0)=f^2(0)$ ולכן $f(0)=0$ ולכן $f(z)=z^k g(z)$ כאשר $k\geq 1$ ו-$g(0)\neq 0$

(6) לכן $\sin(z) = f^2(z) = z^{2k} g^2(z)$
בסביבה של $z=0$. כיוון ש- $2k \geq 2$ נקבל
של $\sin$ יש אפס מסדר גדול או שווה ל-2
ב-$z=0$, אבל $\sin'(z) = \cos(z)\big|_{z=0} = 1 \neq 0$
ולכן ל-$\sin$ יש אפס מסדר 1 ב-$z=0$
וקיבלנו סתירה.

<u>משפט היחידות</u>: תהי f פונקציה אנליטית
בתחום R. תהי $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים
מרוכבים עם נק' הצטברות z_0 כך ש-z_0
נמצאת בתחום ההגדרה של f. אם $f(z_n)=0$
$\forall n \geq 1$ אז $f \equiv 0$ בתחום R.

- במקרה נקבל שאם f ו-g הן פונקציות
אנליטיות בתחום R ומתלכדות על סדרה
עם נקודת הצטברות אז $g \equiv f$ (כי נסמן
$g - f = h$)

~~הערה~~: משפט היחידות אינו נכון אם נקודת
ההצטברות z_0 לא נמצאת ב-R, ולדוגמא
הפונ' $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ שאנליטית ב-$\mathbb{C}\setminus\{0\}$
מתאפסת עבור $z_n = \frac{1}{\pi n}$ ולסדרה $\left\{\frac{1}{\pi n}\right\}$
יש נקודת הצטברות $z_0=0$ ובכל זאת $f \not\equiv 0$.
הסיבה היא ש-$z_0=0$ לא נמצאת בתחום ההגדרה
של הפונ' f.