פתרון תרגיל בית 3 תורת גלואה - תשע"ח

1. תהי K/F הרחבת שדות ממימד p, כאשר p מספר ראשוני. הוכיחו כי אין שדות ביניים, כלומר שאין שדה $F \subsetneq L \subsetneq K$.

פתרון. נניח בשלילה שיש $F \subsetneq L \subsetneq K$. אזי לפי כפליות המימד $[K\colon F] = p \mid [L\colon F]$ ולכן $[L\colon F] = 1, p$ מה שאומר ש $L = K$ או $L = F$.

2. יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום אי־פריק מדרגה n, וK/F הרחבה ממימד m. הראו שאם n, m הם זרים אז $f(x)$ הוא אי־פריק גם מעל K.

פתרון. נתבונן בהרחבה $K[a]/F$ עבור a שורש כלשהו של $f(x)$

מצד אחד

$$[K[a]\colon F] = [K[a]\colon K]\,[K\colon F] = [K[a]\colon K] \cdot m$$

ובנוסף, $n = [F[a]\colon F] \mid [K[a]\colon F]]$ (המימד הוא n היא הפולינום המינימלי של a הוא $f(x)$ כי הוא מתאפס ואי־פריק), ולכן

$$n \mid [K[a]\colon K] \cdot m$$
$$n \mid [K[a]\colon K]$$

כי n, m הם זרים.

. מצד שני לפי למה מהכיתה $n = [F[a]\colon F] \leq [K[a]\colon K]$.

. נסיק ש $[K[a]\colon K] = n$ כלומר שהדרגה של הפולינום המינימלי של a מעל K היא גם n ־ ולכן $f(x)$ הוא הפולינום המינמלי מעל K (הוא מוגדר שם, מתאפס, ובדרגה הנכונה) מה שאומר שהוא אי־פריק מעל K.

3. תהי הרחבה K/F ואיברים $a, b \in K$ כך שמימדי ההרחבות $[F[a]\colon F]\,,\,[F[b]\colon F]$ הם זרים. הוכיחו כי

$$[F[a, b]\colon F] = [F[a]\colon F] \cdot [F[b]\colon F]$$

.

פתרון. . לפי כפליות המימד $[F[a]\colon F]\,,[F[b]\colon F] \mid [F[a, b]\colon F]$ ולכן הlcm שלהם מחלק את $[F[a, b]\colon F]$. מכיוון שהם זרים־ הlcm הוא המכפלה כלומר ש $[F[a]\colon F]{\cdot}[F[b]\colon F] \mid [F[a, b]\colon F]$ (ובפרט הימני גדול או שווה מהחלק השמאלי).

. מאידך, לפי למה מהכיתה $[F[a, b]\colon F] \leq [F[a]\colon F] \cdot [F[b]\colon F]$. ביחד נקבל שיש שיוויון.

4. מצאו את הפולינום המינימלי של האיברים הבאים מעל השדה המצויין:

א. $i + \sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}$.

ב. $\sqrt[5]{7}$ מעל $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{7}\right]$.

פתרון. א. נסמן $\alpha = i + \sqrt{2}$. ונחשב

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= 1 + 2\sqrt{2}i\\ \frac{(\alpha^2-1)^2}{4} &= -2\\ \alpha^4 - 2\alpha^2 + 9 &= 0\end{aligned}$$

ולכן $x^4 - 2x^2 + 9$ הוא פולינום מעל $\mathbb{Q}$ שמתאפס בα.

ניתן להראות ש $\mathbb{Q}\left[i + \sqrt{2}\right] = \mathbb{Q}\left[i, \sqrt{2}\right]$ ולחשב ש $= \left[\mathbb{Q}[i, \sqrt{2}]\colon \mathbb{Q}\right]$

4(להוסיף חישוב).

ולכן הפולינום המינימלי צריך להיות מדרגה 4. כך שבהכרח הפולינום שמצאנו הוא הפולינום המינימלי.

ב. קל למצוא פולינום שמתאפס: $x^5 - 7$ שהוא אי־פריק מעל $\mathbb{Q}$ (למשל לפי אייזנשטטין) ולכן $[\mathbb{Q}[\sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}] = 5$.
קל לחשב ש $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}] : \mathbb{Q}] = 3$ (באופן דומה) ולכן לפי שאלה 3 נקבל $[\mathbb{Q}[\sqrt[5]{7}, \sqrt[3]{7}] : \mathbb{Q}] = 15$.
מכפליות המימד $[\mathbb{Q}[\sqrt[5]{7}, \sqrt[3]{7}] : \mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}]] = 5$ ולכן הפולינום המינימלי צריך להיות מדרגה 5, והפולינום $x^5 - 7$ אכן הפולינום המינימלי.
דרך אחרת (אנטון): לפי שאלה 2 הפולינום הזה אי־פריק גם מעל $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}]$ ולכן הוא המינימלי (יש להשלים פרטים).

5. מצאו את שדות הפיצול של הפולינומים הבאים , וחשבו את המימד שלהם מעל $\mathbb{Q}$:

א. $x^5 - 2$

ב. $x^p - 2$ כאשר p מספר ראשוני.

ג. $x^6 - x^3 - 2$

ד. $(x^2 + 1)(x^3 - 1)$

פתרון. א. לפי ב. (זה נועד להיות סעיף חימום).

ב. השורשים הם $\sqrt[p]{2}\rho_p^j$ עבור $j = 0, \dots, p-1$, כאשר ρ_p הוא שורש יחידה p־פרימיטיבי (למשל $e^{\frac{2\pi i}{p}}$).
שדה הפיצול הוא $\mathbb{Q}[\sqrt[p]{2}, \sqrt[p]{2}\rho_p, \dots, \sqrt[p]{2}\rho_p^{p-1}] = \mathbb{Q}[\sqrt[p]{2}, \rho_p]$.
כידוע, $[\mathbb{Q}[\rho_p] : \mathbb{Q}] = p - 1$ וקל לחשב ש $[\mathbb{Q}[\sqrt[p]{2}] : \mathbb{Q}] = p$. מכיוון שהם זרים (כי p ראשוני) לפי שאלה 3 נקבל $[\mathbb{Q}[\sqrt[p]{2}, \rho_p] : \mathbb{Q}] = p(p-1)$.

ג. נמצא את השורשים. לפי נוסחא הריבועית $x^3 = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 3, -1$ ולכן השורשים הם $\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}\rho_3, \sqrt[3]{3}\rho_3^2, -1, -\rho_3, -\rho_3^2$ כאשר

ρ_3 הוא שורש יחידה 3־פרימיטיבי.
שדה הפיצול הוא $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{3}, \rho_3\right] = \mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}\rho_3, \sqrt[3]{3}\rho_3^2, -1, -\rho_3, -\rho_3^2\right]$.
המימד הוא 6 לפי חישוב מאוד דומה למה שהיה בסעיף הקודם.

ד. השורשים הם $\pm i, \rho_3\rho_3^2, 1$ ושדה הפיצול הוא $\mathbb{Q}\left[\pm i, \rho_3\rho_3^2, 1\right] = \mathbb{Q}\left[\rho_3, i\right] =$ $\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}, i\right]$.
המימד הוא 4 כי $\left[\mathbb{Q}[\sqrt{3} \colon \mathbb{Q}\right] = 2$ ו $\left[\mathbb{Q}[\sqrt{3}, i] \colon \mathbb{Q}[\sqrt{3}]\right] = 2$.
השיוויון האחרון נכון כי x^2+1 פולינום מתאפס ולכן המימד לכל היותר 2. המימד לא יכול להיות 1 כי אז $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, i] = \mathbb{Q}[\sqrt{3}$ אבל זה לא ייתכן אחד מרוכב והשני ממשי.

6. יהי פולינום $f(x) \in F[x]$. ויהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ כל שורשי הפולינום.
הוכיחו כי שדה הפיצול של $f(x)$ מעל F הוא $F[\alpha_2, \ldots, \alpha_n]$.

פתרון. . נסמן את הפולינום $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ כאשר $a_i \in F$. מעל שדה הפיצול $f(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ נכפול ונקבל שהמקדם החופשי הוא $\alpha_1 \cdots \alpha_n = a_0 \in F$.
אם כן $\alpha_1 = \dfrac{a_0}{\alpha_2 \cdots \alpha_n} \in F\left[\alpha_2, \ldots, \alpha_n\right]$ ואז שדה הפיצול הוא $F\left[\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right] = F\left[\alpha_2, \ldots, \alpha_n\right]$.