אינפי 1 החממה - תרגול 4

9 בנובמבר 2020

1 אריתמטיקה של גבולות - המשך

תרגילים:

1. הוכיחו שהסדרה $a_n = \frac{\sin n}{\ln n}$ מתכנסת וחשבו את גבולה.
פתרון: $-1 \le \sin n \le 1$, ובנוסף כיון ש- $\ln n \to \infty$ אז $\frac{1}{\ln n} \to 0$, וכידוע, חסומה כפול אפסית שואפת לאפס (כלומר, המשפט אומר: $a_n \to 0$ ו-b_nחסומה אז $a_n b_n \to 0$. ולכן בסה"כ $\frac{\sin n}{\ln n} \to 0$.

2. תהי $\{a_n\}$ סדרה כך ש- $a_n \to a$.

(א) הוכיחו שאם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$ אז $|L| \le 1$.
פתרון: עבור $a \neq 0$: אז ניתן להשתמש בקלות באריתמטיקה ולקבל:

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim a_{n+1}}{\lim a_n} = \frac{a}{a} = 1$$

עבור $a = 0$: לפי הגדרה, לכל $\epsilon > 0$ קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$ מתקיים:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \epsilon$$

נניח בשלילה $|L| > 1$, אי השיוויון נכון לכל אפסילון, ובפרט עבור $\epsilon = |L| - 1 > 0$. כלומר:

$$\left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - |L| \right| \le \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < |L| - 1$$

ולכן:

$$1 - |L| < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - |L| < |L| - 1$$

אם נעשה העברת לחלק השמאלי נקבל:

$$1 < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \Rightarrow |a_n| < |a_{n+1}|$$

מכאן רואים שהסדרה $\{|a_n|\}$ מונו' עולה ממש ואי־שלילית. ולכן $|a_n| \not\to 0$.
אבל נתון $a_n \to 0$ ולכן $|a_n| \to 0$ בסתירה.

(ב) תנו דוג' לסדרה מתכנסת $a_n \to a$, עבורה $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לא קיים.
פתרון:נגדיר:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = 2k \\ \frac{1}{n^2} & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{(n+1)^2} \to 0 & n = 2k \\ \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n+1} \to \infty & n = 2k+1 \end{cases}$$

ולכן אין גבול.

3. מצאו את הגבולות הבאים, אם קיימים:

(א) $\lim\limits_{n\to\infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$
פתרון: נשתמש במשפט הסנדוויץ':

$$3 = (3^n)^{\frac{1}{n}} \le (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} \le (3^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = (2 \cdot 3^n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} \cdot 3 \to 3$$

כאשר השאיפה בסוף נובעת מכך שלכל $a > 0$ מתקיים: $a^{\frac{1}{n}} \to 1$.

(ב) $\lim(3^n + (-2)^n + 5^n)^{\frac{1}{n}}$
פתרון:

$$5 = (5^n)^{\frac{1}{n}} \le (\underbrace{3^n + (-2)^n}_{>0} + 5^n)^{\frac{1}{n}} \le (3 \cdot 5^n)^{\frac{1}{n}} \to 5$$

(ג) $\lim(3^n + (-4)^n + 5^n)^{\frac{1}{n}}$
נשתמש במשפט הסנדוויץ': מצד אחד:

$$(3^n + (-4)^n + 5^n)^{\frac{1}{n}} \le (3 \cdot 5^n)^{\frac{1}{n}} \to 5$$

מצד שני:

$$5 \leftarrow 5 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\to 1} \le 5 \cdot \left(\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(-\frac{4}{5}\right)^n + 1}_{\ge \frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(5^n \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(-\frac{4}{5}\right)^n + 1\right)\right)^{\frac{1}{n}} = (3^n + (-4)^n + 5^n)^{\frac{1}{n}}$$

2 התכנסות במובן הרחב

הגדרה: נאמר שהסדרה a_n מתכנסת לאינסוף (ונסמן $a_n \to \infty$) אם לכל $M > 0$ קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_0$ מתקיים: $a_n > M$.

תרגילים:

1. הוכיחו לפי הגדרה:

(א) $\lim\limits_{n\to\infty} 2n^2 = \infty$

יהי $M > 0$, רוצים למצוא N_0 כך שלכל $n > N_0$ מתקיים:

$$2n^2 > M$$

$$\Updownarrow$$

$$n > \sqrt{\frac{M}{2}}$$

ולכן ניקח $N_0 = \left\lceil \sqrt{\frac{M}{2}} \right\rceil$, ואז אם $n > N_0$ אז נקבל $2n^2 > M$.

(ב) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$

יהי $M > 0$. צריך למצוא N_0 כך שלכל $n > N_0$ מתקיים:

$$\frac{n^2}{n+1} > M$$

כעת כיון ש־

$$\frac{n^2}{n+1} > \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$$

ולכן אם $n > 2M$ נקבל הדרוש. לכן ניקח $N_0 = \lceil (2M) \rceil$ ואז...

2. חשבו:

(א) $\lim\limits_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n}}$

פתרון: נשתמש במשפט הפיצה של ארז (=משפט הסנדוויץ' הרחב): תהי a_n סדרה. אם לכל n $a_n \geq b_n$ ו־$b_n \to \infty$ אז $a_n \to \infty$.

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \to \infty$$

כי:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdots \frac{n}{2}$$

(ב) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}$ נפתור בסוף.

3. תהיינה a_n, b_n סדרות כך ש־ $a_n \to \infty$, והסדרה b_n חסומה מלרע. הוכיחו: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$.
פתרון: נסמן $k=\inf\{b_n\}$, ונקבל:

$$a_n+b_n \geq a_n+k \to \infty$$

ולפי הפיצה סיימנו.

4. תהיינה $a_n, b_n \to \infty$. מה האפשרויות ל־ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$?
פתרון: כמעט הכל:
$a>0$ אז $a_n=an, b_n=n$ אז $\frac{a_n}{b_n}=\frac{an}{n}=a\to a$
$a=0$ אז $a_n=n, b_n=n^2$ ועבור שאיפה לאינסוף הפוך.
מתבדר:

$$a_n=\begin{cases}2n & n=2k\\ n & n=2k-1\end{cases}$$

$$b_n=n$$

ואז

$$\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases}2 & n=2k\\ 1 & n=2k-1\end{cases}$$

הגבול לא יכול להיות שלילי כי החל ממקום מסויים (כיון ששתי הסדרות שואפות לאינסוף שתיהן חיוביות החל ממקום מסויים) סדרת המנות $\frac{a_n}{b_n}>0$ ולכן לא יכולה להתכנס לגבול שלילי.

5. הוכיחו או הפריכו: אם $a_n\to\infty$ אז החל ממקום מסויים a_n מונוטונית עולה.
פתרון: הפרכה:

$$a_n=\begin{cases}2n & even\\ n & odd\end{cases}$$

3 אי שוויון הממוצעים

בשיעורי הבית תוכיחו שלכל $x_1,\dots,x_n>0$ מתקיים:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \leq \left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

משפט: אם a_n סדרה חיובית ומתקיים $a_n \to L$ אז: $(\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}} \to L$. מתבסס על כך ששתי הסדרות בקצוות מתכנסות ל־L ואז לפי סנדוויץ'. לא מוכיחים בקורס למיטב ידיעתי כי משתמשים במשפט שלא מוכיחים בקורס ־ משפט שטולץ.

תרגילים:

1. אם a_n סדרה חיובית והגבול $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ קיים, אז הסדרה $\sqrt[n]{a_n}$ מתכנסת ומתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

פתרון: נגדיר סדרה חדשה

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \end{cases}$$

נקבל $\lim b_n = \lim \frac{a_n}{a_{n-1}}$, ולכן לפי המשפט לעיל נקבל:

$$\sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} \to \lim \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

אבל:

$$\sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{a_n}$$

ולכן

$$\sqrt[n]{a_n} \to \lim \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

2. הוכיחו:

(א) $\sqrt[n]{n} \to 1$

פתרון: נגדיר $a_n = n$, ואז נקבל מהתרגיל הקודם שמתקיים:

$$\lim \sqrt[n]{n} = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim \frac{n}{n-1} = 1$$

(ב) $\sqrt[n]{n!} \to \infty$

פתרון: נגדיר $a_n = n!$, ואז מהתרגיל הקודם נקבל שמתקיים:

$$\lim \sqrt[n]{n!} = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim \frac{n!}{(n-1)!} = \lim n = \infty$$