

תרגיל 5 באינפי 2

1. הוכיחו את אי השוויון

$$\frac{4}{9}(e-1) \leq \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)(2-x)} dx \leq \frac{1}{2}(e-1)$$

2. חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t^2 dt}{x^6}$$

3. מצאו את כל נקודות המינימום המקומיות של הפונקציה

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$$

בקטע $(0, \infty)$

4. (א) תהי f פונקציה המוגדרת על התחום $[a, b]$. נניח ש f היא אי שלילית, רציפה ובנוסף קיימת נקודה $x_0 \in [a, b]$ כך ש $f(x_0) > 0$. הוכיחו כי

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

(רמז: הראו כי יש $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה T הסכום העליון של דרבו גדול מ δ)

(ב) הראו כי אם מוותרים על הדרישה ש f רציפה, הטענה בסעיף א לא נכונה (כלומר, מצאו דוגמא נגדית).

5. חשבו את

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx$$

כאשר $m, n \in \mathbb{Z}$.

6. חשבו את גבולות הסדרות הבאות (רמז: חשבו על סכומי רימן):

(א)

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{\frac{k^2}{n^2}}$$

(b)

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}}$$

(a)

$$c_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \sin \frac{k}{2^n}$$