

חשבון אינפי 1 למדמ"ח

תרגיל 13

1. חשבו את הגבולות הבאים בעזרת משפט הסנדוויץ':

א.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \sin 1 + 2 \sin 2 + \dots + n \sin n}{n^3}$$

ב.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n} \right)$$

ג.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + (-1)^n + 9^n}$$

2. הוכיחו כי הסדרות הרקורסיביות הבאות מתכנסות וחשבו את גבולותיהן:

א. סדרה המוגדרת ע"י $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$

ב. סדרה המוגדרת ע"י $a_1 = 10, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$

3. עבור הסדרות הבאות אם הסדרה חסומה מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה והסבירו מדוע אלה כולם ואם הסדרה אינה חסומה מצאו תת סדרה המתבדרת לאינסוף:

א.
$$\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} = \left\langle \frac{7^n + (-7)^n}{5^n} \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right\rangle_{n \in \mathbb{N}}$$

ב.
$$\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} = \left\langle \frac{\sqrt{\sqrt{n} + 2} \sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{2n + \sqrt{3n}}} \right\rangle_{n \in \mathbb{N}}$$

4. תהיינה $\langle a_n \rangle$ ו- $\langle b_n \rangle$ שתי סדרות נתונות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ו- $\langle b_n \rangle$ חסומה, אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

ג. אם $\langle a_n + b_n \rangle$ מתכנסת, אז $\langle a_n \rangle$ ו- $\langle b_n \rangle$ מתכנסות.

ד. אם $\langle a_n \rangle$ סדרת חסומה, אזי $\langle a_n \rangle$ היא סדרת קושי.

ה. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \infty$

ו. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \infty$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$

בהצלחה!!