

צורת ג'ורדן של מטריצה

בו עז צבאן

11 בינואר 2011

1 מבוא

מטרתנו היא להוכיח את המשפט הבא.

משפט 1.1 (משפט ג'ורדן)

1. תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים. אזי יש $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה, כך ש $P^{-1}AP$ היא סכום ישר של בלוקי ג'ורדן $J_m(\lambda)$.

2. יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור כך שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים. אזי T ניתן להצגה כסכום ישר של בלוקי ג'ורדן $J_m(\lambda)$.

יתר על כן, הצגות המטריצה או האופרטור כסכום ישר של בלוקי ג'ורדן הן יחידות, עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

הגדרה 1.2 הצגה של מטריצה/אופרטור כסכום ישר של בלוקי ג'ורדן תיקרא צורת ג'ורדן של המטריצה/אופרטור.

הערה 1.3 משפטים רבים בקורס נובעים מיידית ממשפט ג'ורדן. למשל:

1. כל מטריצה שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים ניתנת לשילוש.

2. משפט קיילי-המילטון (כאשר הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים) - דבר שאפשר להבטיח על ידי הרחבת שדות, שתלמדו בקורס אחר.

3. הפולינום המינימלי מחלק את האופייני והאופייני מחלק חזקת המינימלי (כאשר הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים).

בהוכחת משפט ג'ורדן, נשתמש בחלק ממשפטים אלה. לכן, אין לראות בזה הוכחה חדשה של המשפטים הקודמים, אלא יותר המחשה כמה משפט ג'ורדן מסכם יפה דברים רבים שלמדנו, ותורם להבנת המבנה של מטריצות ותכונותיהן.

ראשית נסביר, מדוע היחידות של צורת ג'ורדן היא רק עד כדי סדר הבלוקים.

הגדרה 1.4 יהיו $T : V \rightarrow V$ אופרטור, $U \subseteq V$ תת-מרחב אינווריאנטי תחת T , ו E בסיס של U . אזי $T|_U : U \rightarrow U$ אופרטור, וניתן להציג אותו $[T|_U]_E$. נסמן הצגה זו בקצרה: $[T]_E$. במלים אחרות, עבור קבוצה בת $E \subseteq V$ שאינה דווקא בסיס, כך ש $\text{span } E$ אינווריאנטי תחת T , יסמן את המטריצה $[T]_{\text{span } E}$.

הגדרה 1.5 עבור $u \in \mathbb{F}^l$, $v \in \mathbb{F}^k$ נסמן ב $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{k+l}$ את הוקטור ש k רכיביו הראשונים הם רכיבי v , והרכיבים הנותרים הם רכיבי u (שירשור שני הוקטורים). באופן דומה, נגדיר שירשור מספר כלשהו של וקטורים.

לחלק מהטענות שנוכיח ניתן שמות, שיקלו עלינו להזכר בהם בעת הצורך.

למה 1.6 (הצגה האלכסונית-בלוקים) יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור.

1. יהיו $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישר של מרחבים אינווריאנטיים תחת T , ולכל $i = 1, \dots, k$ יהי B_i בסיס של U_i . נסמן $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$. אזי:

$$[T]_B = [T]_{B_1} \oplus [T]_{B_2} \oplus \dots \oplus [T]_{B_k} = \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & O & \dots & O \\ O & [T]_{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \dots & O & [T]_{B_k} \end{pmatrix}$$

2. מצד שני, אם $[T]_B = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$ סכום ישר של מטריצות ריבועיות, אז יש פירוק של B לאיחוד זר, $[T]_{B_i} = A_i$ ו $U_i = \text{span } B_i$ הוא אינוריאנטי תחת T , $i = 1, \dots, k$ כך שלכל $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$.

הוכחה: באינדוקציה על k .

(1) עבור $k = 1$ אין מה להוכיח.

המקרה $k = 2$: יהי $V = U_1 \oplus U_2$, כאשר U_1, U_2 אינוריאנטים תחת T , B_1, B_2 בסיסים של U_1, U_2 בהתאמה, $B = B_1 \cup B_2$. לכל $v \in B_1$, כיון ש $B_1 \subseteq U_1$ ו U_1 אינוריאנטי תחת T , ולכל ניתן להציגו כצירוף לינארי של אברי B_1 . לכן,

$$[Tv]_B = \begin{pmatrix} [Tv]_{B_1} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

בדומה, לכל $u \in B_2$ מתקיים $[Tu]_B = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ [Tu]_{B_2} \end{pmatrix}$ יהיו $B_1 = \{v_1, \dots, v_r\}$, $B_2 = \{u_1, \dots, u_d\}$ אזי

$$\begin{aligned} [T]_B &= ([Tv_1]_B, \dots, [Tv_r]_B, [Tu_1]_B, \dots, [Tu_d]_B) = \\ &= \begin{pmatrix} [Tv_1]_{B_1}, \dots, [Tv_r]_{B_1}, \vec{0}, \dots, \vec{0} \\ \vec{0}, \dots, \vec{0}, [Tu_1]_{B_2}, \dots, [Tu_d]_{B_2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & O \\ O & [T]_{B_2} \end{pmatrix} = [T]_{B_1} \oplus [T]_{B_2}. \end{aligned}$$

כעת נניח את נכונות הטענה (1) עבור פחות מ k מחוברים, ונוכיחה עבור k מחוברים. מהנתון, $V = (U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_{k-1}) \oplus U_k$ סכום ישר של שני תת-מרחבים אינוריאנטים, ו $B = (B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}) \cup B_k$ איחוד זר של בסיסים של שני מרחבים אלה. מהמקרה $k = 2$, נקבל ש

$$[T]_B = [T]_{B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}} \oplus [T]_{B_k}$$

מהנחת האינדוקציה עבור $k - 1$, ולכן $[T]_{B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}} = [T]_{B_1} \oplus \dots \oplus [T]_{B_{k-1}}$, ולכן

$$[T]_B = [T]_{B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}} \oplus [T]_{B_k} = [T]_{B_1} \oplus \dots \oplus [T]_{B_{k-1}} \oplus [T]_{B_k}$$

(2) גם כאן הטענה נובעת, באינדוקציה, מהמקרה $k = 2$. נוכיח איפוא מקרה זה.

יהי $[T]_B = A_1 \oplus A_2$ סכום ישר של מטריצות ריבועיות, נניח $A_1 \in \mathbb{F}^{r \times r}$, $A_2 \in \mathbb{F}^{d \times d}$. יהי $B = \{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_d\}$ נסמן $U_1 = \text{span } B_1$ ו $U_2 = \text{span } B_2$, $B_1 = \{v_1, \dots, v_r\}$, $B_2 = \{u_1, \dots, u_d\}$.

$$\begin{aligned} ([Tv_1]_B, \dots, [Tv_r]_B, [Tu_1]_B, \dots, [Tu_d]_B) &= [T]_B = A_1 \oplus A_2 = \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 e_1, \dots, A_1 e_r, \vec{0}, \dots, \vec{0} \\ \vec{0}, \dots, \vec{0}, A_2 e_1, \dots, A_2 e_d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן, לכל $i = 1, \dots, r$, $[Tv_i]_B = \begin{pmatrix} A_1 e_i \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ ובפרט Tv_i צירוף לינארי של v_1, \dots, v_r (בלבד), ולכן שייך ל $U_1 = \text{span } B_1$. לכן, $T[U_1] = \text{span } T[B_1] \subseteq U_1$, כלומר U_1 הוא אינוריאנטי תחת T . יתר על כן, כיון ש Tv_i צירוף לינארי של v_1, \dots, v_r בלבד, $A_1 e_i = [Tv_i]_B = [Tv_i]_{B_1}$ ולכן

$$[T]_{B_1} = ([Tv_1]_{B_1}, \dots, [Tv_r]_{B_1}) = (A_1 e_1, \dots, A_1 e_r) = A_1$$

באותו אופן (בדוק!), $[T]_{B_2} = A_2$ ומתקיים T תחת U_2 אינוריאנטי.

מסקנה 1.7 אם $[T]_B = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$ סכום ישר של מטריצות ריבועיות, אז לכל $\sigma \in S_k$ יש בסיס B' (המתקבל מ B על ידי שינוי סדר איבריו), כך ש $[T]_{B'} = A_{\sigma(1)} \oplus A_{\sigma(2)} \oplus \dots \oplus A_{\sigma(k)}$.

הוכחה: מהחלק השני של הלמה הקודמת, יש פירוק של B לאיחוד זר, $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$, התת-מרחב $U_i = \text{span } B_i$ הוא אינוריאנטי תחת T , ו $[T]_{B_i} = A_i$. נסדר את אברי B בצורה אחרת: $B = B_{\sigma(1)} \cup B_{\sigma(2)} \cup \dots \cup B_{\sigma(k)}$. אז מהחלק הראשון של הלמה,

$$[T]_B = [T]_{B_{\sigma(1)}} \oplus [T]_{B_{\sigma(2)}} \oplus \dots \oplus [T]_{B_{\sigma(k)}} = A_{\sigma(1)} \oplus A_{\sigma(2)} \oplus \dots \oplus A_{\sigma(k)}$$

מסקנה 1.8 יהי $A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$ סכום ישר של מטריצות ריבועיות. לכל $\sigma \in S_k$, דומה למטריצה $A_{\sigma(1)} \oplus A_{\sigma(2)} \oplus \dots \oplus A_{\sigma(k)}$. כלומר, החלפת סדר הבלוקים באלכסון נותנת מטריצה דומה.

הוכחה: כל מטריצה היא הצגה של אופרטור. לכן אפשר להשתמש במסקנה הקודמת.

2 משפט ג'ורדן הנילפוטנטי

בסעיף זה, נוכיח שלכל אופרטור נילפוטנטי יש צורת ג'ורדן.

למה 2.1 (הפולינום האופייני של אופרטור נילפוטנטי) יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור נילפוטנטי. אזי הפולינום האופייני של T הוא חזקה של x (כלומר, $p_T(x) = x^n$, כאשר $n = \dim V$). בפרט, 0 הוא הערך העצמי היחיד של T .

הוכחה: $T^n = 0$, לכן $x^n \mid p_T(x)$. כיון שכל גורם אי-פריק של $p_T(x)$ מופיע ב $m_T(x)$ ומעלת $p_T(x)$ היא n , $p_T(x) = x^n$. ■

אם בלוק $J_m(\lambda)$ מופיע בצורת ג'ורדן של אופרטור, אז λ מופיע בין אברי האלכסון של צורת ג'ורדן זו, וכיון שמטריצה זו משולשית עליונה, λ ערך עצמי שלה, ולכן גם של האופרטור. לכן, אם יש לאופרטור נילפוטנטי צורת ג'ורדן, אז כל הבלוקים בצורה הזו הם מהסוג $J_m(0)$. לסיכום: המטרה שלנו היא להוכיח שלכל אופרטור נילפוטנטי יש הצגה שהיא סכום ישר של בלוקים מהסוג $J_m(0)$.

ממשפטון ההצגה האלכסונית בלוקים, מה ששקול לעשות זה למצוא בסיס מהצורה $B = E_1 \cup \dots \cup E_k$, כך שכל E_i פורש תת-מרחב אינוריאנטי, ולכל i , $[T]_{E_i} = J_{m_i}(0)$ (עבור $m_i = \#E_i$). ראשית נבדוק מתי קורה ש $[T]_E = J_n(0)$.

למה 2.2 יהיו $T : V \rightarrow V$ אופרטור, E בסיס של V . $[T]_E = J_n(0) \iff E = \{T^{n-1}v, \dots, T^2v, Tv, v\}$, כאשר $T^n v = \vec{0}$.

הוכחה: (\Leftarrow) יהי $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ מהנתון,

$$([Tv_1]_E, [Tv_2]_E, \dots, [Tv_n]_E) = [T]_E = J_n(0) = (\vec{0}, e_1, \dots, e_{n-1})$$

לכל $i < n$, $[Tv_i]_E = e_{i-1} = [v_{i-1}]_E$, ולכן $Tv_i = v_{i-1}$. כמו כן, $[Tv_1]_E = \vec{0}$ ולכן $Tv_1 = \vec{0}$. נסמן $v = v_n$. אזי

$$v_{n-1} = Tv_n = Tv, v_{n-2} = Tv_{n-1} = T^2v, \dots, v_1 = Tv_2 = T^{n-1}v$$

וכן $\vec{0} = Tv_1 = T^n v$

(\Rightarrow) מהנתון,

$$\begin{aligned} [T]_B &= ([T(T^{n-1}v)]_E, [T(T^{n-2}v)]_E, \dots, [T(v)]_E) = \\ &= ([T^n v]_E, [T^{n-1}v]_E, \dots, [Tv]_E) = (\vec{0}, e_1, \dots, e_{n-1}) = J_n(0). \end{aligned}$$

אפשר לחשוב על $Tv, T^2v, \dots, T^{n-1}v$ כמסלול שמתחיל ב v , ובכל פעם מתקדם ל T של מה שהיה קודם, ועוצר בדיוק לפני שמגיעים ל $\vec{0}$. מכאן השם "מסלול".

■

הגדרה 2.3 קבוצה (לאו דווקא פורשת) מהצורה $E = \{T^{m-1}v, \dots, T^2v, Tv, v\}$, כאשר $T^m v = \vec{0}$ ו $T^{m-1}v \neq \vec{0}$, תיקרא מסלול מאורך m .

למה 2.4 כל מסלול הוא קבוצה בת"ל.

הוכחה: נניח ש $\vec{0} = \alpha_0 v + \alpha_1 Tv + \dots + \alpha_{m-1} T^{m-1}v$. נפעיל על שני האגפים, לקבל

$$\begin{aligned} \vec{0} &= T^{m-1}(\vec{0}) = T^{m-1}(\alpha_0 v + \alpha_1 Tv + \dots + \alpha_{m-1} T^{m-1}v) = \\ &= \alpha_0 T^{m-1}v + \alpha_1 T^m v + \alpha_2 T^{m+1}v + \dots + \alpha_{m-1} T^{2m-2}v = \\ &= \alpha_0 T^{m-1}v + \vec{0} + \vec{0} + \dots + \vec{0} = \alpha_0 T^{m-1}v \end{aligned}$$

ולכן $\alpha_0 = 0$. לכן, $\vec{0} = \alpha_1 Tv + \dots + \alpha_{m-1} T^{m-1}v = \alpha_0 v + \alpha_1 Tv + \dots + \alpha_{m-1} T^{m-1}v = \vec{0}$. נפעיל איפוא על שני האגפים, לקבל

$$\begin{aligned} \vec{0} &= T^{m-2}(\vec{0}) = T^{m-2}(\alpha_1 Tv + \dots + \alpha_{m-1} T^{m-1}v) = \\ &= \alpha_1 T^{m-1}v + \alpha_2 T^m v + \dots + \alpha_{m-1} T^{2m-3}v = \\ &= \alpha_1 T^{m-1}v + \vec{0} + \dots + \vec{0} = \alpha_1 T^{m-1}v \end{aligned}$$

נשלים את מה שהתקבל לבסיס של $\ker T \cap \text{im } T^{k-3}$, על ידי הוספת וקטורים $T^{k-3}v_{r_2+1}, \dots, T^{k-3}v_{r_3}$.
נמשיך באותו אופן, עד שנקבל בסיס

$$\underbrace{T^{k-1}v_1, \dots, T^{k-1}v_{r_1}}_1, \underbrace{T^{k-2}v_{r_1+1}, \dots, T^{k-2}v_{r_2}}_2, \dots, \underbrace{T^{k-1}v_{r_{k-2}+1}, \dots, T^{k-1}v_{r_{k-1}}}_{k-1}, \underbrace{v_{r_{k-1}+1}, \dots, v_{r_k}}_k$$

של $\ker T$. נוכיח שאיחוד המסלולים

$$B = \left\{ \begin{array}{ccccccc} v_1 & \dots & v_{r_1} & & & & \\ Tv_1 & \dots & Tv_{r_1} & v_{r_1+1} & \dots & v_{r_2} & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \dots \\ T^{k-1}v_1 & \dots & T^{k-1}v_{r_1} & T^{k-2}v_{r_1+1} & \dots & T^{k-2}v_{r_2} & \dots \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & v_{r_{k-2}+1} \dots v_{r_{k-1}} \\ & & & & & & Tv_{r_{k-2}+1} \dots Tv_{r_{k-1}} \\ & & & & & & v_{r_{k-1}+1} \dots v_{r_k} \end{array} \right\}$$

מהווה בסיס של V .

אי-תלות לינארית: נבחן בצירוף לינארי כללי שמתאפס:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{d=1}^i \sum_{j=r_{d-1}+1}^{r_d} \alpha_{ij} T^{i-d} v_j = \vec{0}$$

אם נפעיל T^{k-1} , כמעט כל הוקטורים יתאפסו (כיון שהוקטורים בשורה התחתונה של מטריצת הוקטורים הנ"ל כולם ב $\ker T$), ונקבל $\vec{0} = \sum_{j=1}^{r_1} \alpha_{1j} T^{k-1} v_j$. כיון ש $T^{k-1}v_1 \dots T^{k-1}v_{r_1}$ בת"ל (אברי השורה האחרונה במטריצת הוקטורים הם בסיס של $\ker T$), $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \dots = \alpha_{1r_1} = 0$, כלומר מקדמי השורה הראשונה מתאפסים. לכן,

$$\sum_{i=2}^k \sum_{d=1}^i \sum_{j=r_{d-1}+1}^{r_d} \alpha_{ij} T^{i-d} v_j = \sum_{i=1}^k \sum_{d=1}^i \sum_{j=r_{d-1}+1}^{r_d} \alpha_{ij} T^{i-d} v_j = \vec{0}$$

כעת, אם נפעיל את T^{k-2} על אגף שמאל, כמעט כל הוקטורים יתאפסו ונקבל

$$\sum_{d=1}^2 \sum_{j=r_{d-1}+1}^{r_d} \alpha_{2j} T^{k-d} v_j = \vec{0}$$

וכיון שזה צירוף לינארי של וקטורים בת"ל, נקבל ש $\alpha_{21} = \dots = \alpha_{2,r_2} = 0$, כלומר מקדמי השורה השנייה מתאפסים. נמשיך באותו אופן, להראות שלכל $k, i = 1, \dots, k$, מקדמי שורה i הם 0, כלומר כל המקדמים הם 0.

פרישה: לכל $m = 0, \dots, k-1$, הבסיס שבחרנו עבור $\ker T \cap \text{im } T^m$ מוכל ב $T^m [\text{span } B]$, לכן

$$\ker T \cap \text{im } T^m \subseteq T^m [\text{span } B]$$

יהי $v \in V$. אז $T^{k-1}v \in \text{im } T^{k-1} \subseteq T^{k-1} [\text{span } B]$

טענה: לכל $m = 1, \dots, k-1$, אם $T^m v \in T^m [\text{span } B]$, אז $T^{m-1}v \in T^{m-1} [\text{span } B]$

הוכחת הטענה: יהי $u \in \text{span } B$ כך ש $T^m v = T^m u$, אז

$$T(T^{m-1}v - T^{m-1}u) = T^m v - T^m u = \vec{0}$$

לכן $T^{m-1}v - T^{m-1}u \in \ker T \cap \text{im } T^{m-1} \subseteq T^{m-1} [\text{span } B]$ גם $T^{m-1}v \in T^{m-1} [\text{span } B]$. \square

לכן, כיון ש $T^{k-1}v \in T^{k-1} [\text{span } B]$, נקבל ש $T^{k-2}v \in T^{k-2} [\text{span } B]$, ומזה נקבל ש $T^{k-3}v \in T^{k-3} [\text{span } B]$, וכו', ולבסוף נקבל ש $v = T^0 v \in T^0 [\text{span } B] = \text{span } B$. \blacksquare

למה 2.10 יהי $E = \{T^{m-1}v, \dots, T^2v, Tv, v\}$ מסלול מאורך m , ונסמן $V_0 := \text{span } E, T_0 := T|_{\text{span } E}$. אזי

$$\dim (\ker T_0 \cap \text{im } T_0^j) = \begin{cases} 0 & j \geq m \\ 1 & j < m \end{cases}$$

הוכחה: יהי $j \leq m$. אז $T^j[E_0] = \{\vec{0}\}$, ולכן $\text{im } T_i^j = T^j[V_0] = \{\vec{0}\}$. בפרט, $\dim(\ker T_0 \cap \text{im } T_0^j) = 0$.
 יהי $j < m$. כיון ש $T^m v, T^{m-1}v, \dots, T^2v, Tv$ והם בת"ל, $\dim \text{im } T_0 \geq m - 1$. לכן,

$$\dim \ker T_0 + (m - 1) \leq \dim \ker T_0 + \dim \text{im } T_0 = \dim V_0 = m$$

לכן, $\dim \ker T_0 \leq 1$, ובפרט $\dim(\ker T_0 \cap \text{im } T_0^j) \leq 1$. מצד שני, $T^{m-1}v \in \ker T_0 \cap \text{im } T_0^j$, לכן המימד הוא גם ≤ 1 .

משפט 2.11 (משפט ג'ורדן הנילפוטנטי - יחידות) יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור נילפוטנטי מסדר k , ויהי B בסיס מג'רדן של T . אזי מספר המסלולים מכל אורך B (ולכן גם מספר הבלוקים מכל גודל ב $[T]_B$) נקבע באופן יחיד על ידי T . בפירוט:

1. המסלול הארוך ביותר ב B הוא מאורך k .

2. לכל $m = 1, \dots, k$, מספר המסלולים שאורכם גדול מ m הוא $\dim(\ker T \cap \text{im } T^m)$.
 (לכן מספר המסלולים מאורך m בדיוק הוא $\dim(\ker T \cap \text{im } T^m) - \dim(\ker T \cap \text{im } T^{m-1})$)

הוכחה: (1) נניח שכל המסלולים הם מאורך קטן מ k . אז $T^{k-1}v = \vec{0}$ לכל $v \in B$, ולכן לכל $v \in V$, כלומר $T^{k-1} = O$.
 בסתירה לנתון.

מצד שני, כיון ש $T^k = O$, אין מסלול באורך $k + 1$ או יותר (אחרת, וקטור האפס היה שייך למסלול, בסתירה להגדרת מסלול).

(2) יהיו E_1, \dots, E_r המסלולים ב B , ונסמן $V_i = \text{span } E_i$, $T_i = T|_{V_i}$. כיון ש $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ פירוק לסכום ישר של תת-מרחבים אינוריאנטים, לכל m מתקיים

$$\begin{aligned} \text{im } T^m &= \text{im } T_0^m \oplus \dots \oplus \text{im } T_r^m \\ \ker T &= \ker T_0 \oplus \dots \oplus \ker T_r \end{aligned}$$

לכן,

$$\ker T \cap \text{im } T^m = (\ker T_0 \cap \text{im } T_0^m) \oplus \dots \oplus (\ker T_r \cap \text{im } T_r^m)$$

ולכן

$$\dim(\ker T \cap \text{im } T^m) = \dim(\ker T_0 \cap \text{im } T_0^m) + \dots + \dim(\ker T_r \cap \text{im } T_r^m)$$

מהלמה הקודמת, הסכום מימין שווה למספר המסלולים שאורכם גדול מ m .

אופרטור נילפוטנטי הוא דוגמא למטריצה עם ערך עצמי יחיד:

משפט 2.12 (משפט ג'ורדן עבור מטריצה עם ערך עצמי אחד) יהי $T : V \rightarrow V$ כך שהפולינום האופייני של T הוא חזקה של $x - \lambda$.

(במלים אחרות, מתפרק לגורמים לינארים, ויש ל T ערך עצמי יחיד λ).
 אזי יש ל T הצגה כסכום ישר של בלוקי ג'ורדן $J_m(\lambda)$. הצגה זו יחידה עד כדי סדר המחוברים.

הוכחה: קיום: האופרטור $T - \lambda I$ הוא נילפוטנטי: $(T - \lambda I)^n = p_T(T) = O$, ממשפט קיילי-המילטון.
 ממשפט ג'ורדן הנילפוטנטי (2.9), יש בסיס B של V כך ש $[T - \lambda I]_B = J_{m_1}(0) \oplus \dots \oplus J_{m_k}(0)$ סכום ישר של בלוקי ג'ורדן $J_m(0)$.

כיון ש $[T - \lambda I]_B = [T]_B - \lambda I$,

$$[T]_B = (J_{m_1}(0) \oplus \dots \oplus J_{m_k}(0)) + \lambda I = J_{m_1}(\lambda) \oplus \dots \oplus J_{m_k}(\lambda)$$

יחידות: אילו ל $[T]_B$ היתה הצגה אחרת כזו, אז היינו מקבלים הצגה אחרת לאופרטור הנילפוטנטי $T - \lambda I$, בסתירה ליחידות במשפט ג'ורדן הנילפוטנטי (2.11).

3 משפט ג'ורדן הכללי

הגדרה. יהי $n = \dim V$. המרחב העצמי הפוכלל $\{v \in V : (T - \lambda I)^n v = \vec{0}\}$ $K_\lambda = K_\lambda(T) = \ker(T - \lambda I)^n$

למה 3.1 בסימונים הנ"ל:

$$1. K_\lambda = \{v \in V : \exists k, (T - \lambda I)^k v = \vec{0}\}$$

$$2. V_\lambda \subseteq K_\lambda$$

3. K_λ אינוריאנטי תחת T (ולכן אינוריאנטי תחת $p(T)$ לכל $p(x) \in \mathbb{F}[x]$).

הוכחה: (1) ההכלה (\subseteq) מיידיית (ניקח $k = n$). נוכיח את ההכלה (\supseteq). יהי k הטבעי הקטן ביותר כך ש $(T - \lambda I)^{k+1} v = \vec{0}$. אזי הוקטורים

$$v, (T - \lambda I)v, \dots, (T - \lambda I)^k v$$

הם מסלול ולכן בת"ל.

לכן, $n = \dim V \geq k + 1$, לכן, $n - (k + 1) \geq 0$ ונקבל

$$(T - \lambda I)^n v = (T - \lambda I)^{n-(k+1)} (T - \lambda I)^{k+1} v = (T - \lambda I)^{n-(k+1)} \vec{0} = \vec{0}$$

$$(2) \text{ מ (1), } V_\lambda = \{v \in V : (T - \lambda I)v = \vec{0}\} \subseteq K_\lambda$$

(3) $T - \lambda I$ עם T מתחלף

למה 3.2 בסימונים הנ"ל:

1. אם $\lambda \neq \mu$ ו $v \in K_\lambda$, אז $(T - \mu I)v \in K_\lambda$ ו $\vec{0} \neq (T - \mu I)v$.

2. אם $\lambda \neq \mu$, אז $K_\lambda \cap K_\mu = \{\vec{0}\}$.

הוכחה: (1) כיון ש $v \in K_\lambda$ ו K_λ אינוריאנטי תחת כל פולינום ב T , גם $(T - \mu I)v \in K_\lambda$. נניח ש $(T - \mu I)v = \vec{0}$. אז $Tv = \mu v$. נזכור שבמקרה כזה, לכל $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים $p(T)v = p(\mu)v$. בפרט, עבור $p(x) = (x - \lambda)^n$ נקבל $(T - \lambda I)^n v = (\mu - \lambda)^n v \neq \vec{0}$, בסתירה להנחה ש $v \in K_\lambda$.

(2) נניח שיש $v \in K_\lambda \cap K_\mu$. מ (1), נקבל שכל הוקטורים הבאים שייכים ל K_λ ושונים מ $\vec{0}$:

$$v, (T - \mu I)v, (T - \mu I)^2 v, \dots, (T - \mu I)^n v$$

בפרט, $(T - \mu I)^n v \neq \vec{0}$, בסתירה לכך ש $v \in K_\mu$.

למה 3.3 יהי λ ערך עצמי של אופרטור $T : V \rightarrow V$. נסמן $I_\lambda = \text{im}(T - \lambda I)^n$. אזי:

1. I_λ אינוריאנטי תחת T .

$$2. V = K_\lambda \oplus I_\lambda$$

הוכחה: (1) $T - \lambda I$ מתחלף עם T .

(2) יהי $v \in K_\lambda \cap I_\lambda$. אזי $v = (T - \lambda I)^n u$ ולכן $\vec{0} = (T - \lambda I)^n v = (T - \lambda I)^{2n} u$ ולכן $v = (T - \lambda I)^{2n} u$. ממשפט המימדים ומשפט הדרגה של העתקה לינארית, נקבל $\dim(K_\lambda \oplus I_\lambda) = \dim K_\lambda + \dim I_\lambda = \dim V$.

למה 3.4 יהי λ ערך עצמי של T , ונסמן $T_0 = T|_{K_\lambda}$. אזי $p_{T_0}(x) = (x - \lambda)^m$, כאשר $m = \dim K_\lambda$.

הוכחה: $T_0 - \lambda I : K_\lambda \rightarrow K_\lambda$ מקיים $(T_0 - \lambda I)^n = O$, לכן נילפוטנטי. מהלמה על הפולינום האופייני של אופרטור נילפוטנטי (2.1),

$$x^m = p_{T-\lambda I}(x) = |xI - (T - \lambda I)| = |(x + \lambda)I - T| = p_T(x + \lambda)$$

ואם נציב $y = x + \lambda$ נקבל $p_T(y) = (y - \lambda)^m$.

למה 3.5 $\dim K_\lambda$ שווה לריבוי האלגברי של λ .

הוכחה: ניקח בסיסים B, C עבור K_λ, I_λ בהתאמה. מלמת ההצגה האלכסונית-בלוקים (1.6), $[T]_{B \cup C} = [T]_B \oplus [T]_C$, לכן
 $p_T(x) = p_{T|_{K_\lambda}}(x) \cdot p_{T|_{I_\lambda}}(x)$
מהלמה הקודמת, $p_{T|_{K_\lambda}}(x) = (x - \lambda)^{\dim K_\lambda}$, וכי $T|_{I_\lambda}$ עצמי של $T|_{I_\lambda}$ (כי $V_\lambda \subseteq K_\lambda$) ו $\{0\}$ ו $V_\lambda \subseteq K_\lambda$, ולכן $x - \lambda$ אינו גורם ב $p_{T|_{I_\lambda}}(x)$.
לכן $\dim K_\lambda$ שווה לריבוי האלגברי של λ .

משפט 3.6 (פירוק למרחבים עצמיים מוכללים) נניח שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים מעל \mathbb{F} . יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הערכים העצמיים השונים של T . אזי

$$V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_k}$$

פירוק של V לסכום ישר של תת-מרחבים אינוריאנטים.

הוכחה: א. באינדוקציה על $i = 1, \dots, k$, נראה שהסכום $K_{\lambda_1} + \dots + K_{\lambda_i}$ הוא ישר: עבור $i = 1$ אין מה להוכיח. המקרה $i = 2$ הוכח לעיל (למה 3.2).
נניח איפוא שהסכום עד i הוא ישר, ונוכיח עבור $i + 1$: יהי $v \in (K_{\lambda_1} + \dots + K_{\lambda_i}) \cap K_{\lambda_{i+1}}$. נציגו $v = v_1 + \dots + v_i$ כאשר $v_j \in K_{\lambda_j}$. נפעיל $(T - \lambda_{i+1}I)^n$ לקבל

$$\vec{0} = (T - \lambda_{i+1}I)^n v = (T - \lambda_{i+1}I)^n v_1 + \dots + (T - \lambda_{i+1}I)^n v_i$$

כיון שכל K_{λ_i} אינוריאנטי תחת $T - \lambda_{i+1}I$ (למה 3.1), זו הצגה של $\vec{0}$ כאיבר של $K_{\lambda_1} + \dots + K_{\lambda_i}$. מהנחת האינדוקציה סכום זה ישר, ולכן ההצגה יחידה, ולכן היא בעצם $\vec{0} + \dots + \vec{0}$, כלומר

$$(T - \lambda_{i+1}I)^n v_1 = \dots = (T - \lambda_{i+1}I)^n v_i = \vec{0}$$

כל המקדמים הם 0. לכן, $v_1 \in K_{\lambda_{i+1}} \cap K_{\lambda_1}$, ולכן $v_1 = \vec{0}$. מאותה סיבה, גם $v_2 = \dots = v_i = \vec{0}$, ולכן $v = \vec{0}$.
ב. כיון שהסכום $K_{\lambda_1} + \dots + K_{\lambda_k}$ ישר, $\dim(K_{\lambda_1} + \dots + K_{\lambda_k}) = \dim K_{\lambda_1} + \dots + \dim K_{\lambda_k}$, ששווה לסכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים של T (למה 3.5). כיון שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים, סכום זה שווה למימד של V , ולכן $V = K_{\lambda_1} + \dots + K_{\lambda_k}$.

משפט 3.7 (משפט ג'ורדן) יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור כך שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים. אזי T ניתן להצגה כסכום ישר של בלוקי ג'ורדן. יתר על כן, צורת ג'ורדן היא יחידה עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

הוכחה: קיום: יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ הערכים העצמיים השונים של T . ממשפט 3.6, $V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_k}$. יהיו B_1, \dots, B_k בסיסים של $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_k}$, בהתאמה. כיון שכל K_λ אינוריאנטי תחת T (למה 3.1), נקבל מלמת ההצגה האלכסונית-בלוקים ש

$$[T]_B = [T]_{B_1} \oplus \dots \oplus [T]_{B_k}$$

לכל $i = 1, \dots, k$, כבר ראינו שהפולינום האופייני של $T|_{K_{\lambda_i}}$ הוא חזקה של $x - \lambda_i$. ממשפט ג'ורדן עבור אופרטור עם ערך עצמי יחיד, אפשר לשנות את B_i כך ש $[T]_{B_i}$ היא סכום ישר של בלוקי ג'ורדן $J_m(\lambda_i)$.
יחידות: יהי B בסיס של V כך ש $[T]_B$ סכום ישר של בלוקי ג'ורדן. יהי λ ערך עצמי של T . נשנה את סדר הבלוקים (על ידי שינוי סדר אברי הבסיס) כך שכל הבלוקים מהצורה $J_m(\lambda)$ מכוונים בתחילת הסכום הישר, ושאר הבלוקים הם כל אחד עם ערך עצמי שונה מ λ . אז $[T]_B = A_\lambda \oplus A'$, כאשר A_λ סכום ישר של בלוקים מהצורה $J_m(\lambda)$, ואילו A' סכום ישר של בלוקים $J_m(\mu)$ עם $\mu \neq \lambda$. הגודל k של A_λ הוא הריבוי האלגברי של λ , ולכן נקבע באופן יחיד על ידי T .
מהמשפט על ההצגה אלכסונית-בלוקים, אם נסמן $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, אז $A_\lambda = [T]_{\{v_1, \dots, v_k\}}$, כאשר $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ אינוריאנטי תחת T .

לכן, A_λ היא צורת ג'ורדן של האופרטור $T|_{\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}}$, והפולינום האופייני שלו הוא חזקה של $x - \lambda$. מהמשפט על יחידות צורת ג'ורדן של אופרטור עם ערך עצמי יחיד (2.12), מספר הבלוקים $J_m(\lambda)$ מכל גודל m ב A_λ נקבע באופן יחיד על ידי T .

הערה 3.8 בהצגת ג'ורדן של T , לכל ערך עצמי λ של T :

1. מספר הבלוקים $J_m(\lambda)$ הוא הריבוי הגאומטרי של λ .

2. ה m הגדול ביותר כך ש $J_m(\lambda)$ מופיע בהצגת T הוא מעלת $x - \lambda$ ב $m_T(x)$.

מהמשפטים הנ"ל מקבלים מיידית משפטים מתאימים עבור מטריצות ריבועיות A כאשר $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים: מפעילים את המשפטים על האופרטור של כפל משמאל במטריצה A .

מסקנה 3.9 מטריצות, שהפולינום האופייני שלהן מתפרק לגורמים לינאריים, הן דומות אם ורק אם יש להן אותה צורת ג'ורדן (עד כדי סדר הבלוקים).

■ **הוכחה:** אם המטריצות דומות, אז הן הצגות של אותו אופרטור.

אם הפולינום האופייני אינו מתפרק לגורמים לינאריים, אפשר לעבור לשדה יותר גדול שבו הפולינום מתפרק, ולבדוק שם דמיון בעזרת חישוב צורת ג'ורדן.

תרגיל: בשלב זה, כדאי לחשוב איך מג'ורדנים מטריצה כללית, כל התהליך מההתחלה ועד הסוף, ומה תהיה המטריצה המג'ורדנת.

תודות

תודה לפרופ' עוזי וישנה, שהמציא לידיי הוכחה אינדוקטיבית של משפט ג'ורדן. הצעד הראשון לקראת קבלת ההוכחה המוצגת כאן היה הפיכת הוכחתו להוכחה מפורשת, כלומר כזו שבה רואים בעיניים מהו הבסיס המג'ורדן. מנקודה זו החלה סידרת פישוטים והשלמת פרטים, שהסתיימה בגירסה הנוכחית. תודה למי שתיאר דרך מאד קלה למציאת בסיס מג'ורדן, בערך של ויקיפדיה בעברית על צורת ג'ורדן. הדרך הזו היתה שגויה (ולכן הוסרה, בהמלצתי), אבל נטעה בי את התקווה שאפשר לתת הוכחה פשוטה יחסית למשפט. תודה לפרופ' בוריס קוניאבסקי ולתלמידי לידור אלדבא, על הערותיהם ותיקונייהם לגירסאות קודמות.