אלגברה לינארית, תשע"ו - פתרון תרגיל 6

1. האם הקבוצות הבאות הן ת"ל או בת"ל?

(א) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right\}$

פתרון:

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&-3\end{pmatrix}$ יש משתנה חופשי ולכן אינסוף פתרונות ולכן הקבוצה תלויה לינארית.

(ב) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$

פתרון:

$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&2\\0&0&6\end{pmatrix}$ אין משתנה חופשי ולכן יש פתרון יחיד (הטריוויאלי) ולכן הקבוצה היא בת"ל.

(ג) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-15\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

פתרון:

$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&4&1\\-5&-15&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&-1\\0&-10&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ יש משתנה חופשי אחד ולכן הקבוצה תלויה לינארית.

(ד) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\2\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$

פתרון:

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&2&-1\\-1&-2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-4&1\\0&2&-1\\0&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&-1\\0&0&-1\\0&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

אין משתנים חופשיים ולכן הקבוצה היא בת"ל.

2. הוכיחו כי $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס ל-$\mathbb{R}^2$.

פתרון:

קודם כל נבדוק שהיא בת"ל: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ אין משתנים חופשיים ולכן הקבוצה בת"ל.

את ההמשך אפשר לעשות ב3 דרכים (לפחות):

<u>דרך א</u>: להראות שכל וקטור מהבסיס הסטנדרטי $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של שני הוקטורים הנתונים. (זה יראה ש $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ולכן $\mathbb{R}^2 = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$).

<u>דרך ב</u>: נראה שזו קבוצה פורשת באופן ישיר: נקח וקטור כללי של $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ונבדוק אם קיים פתרון למערכת $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b-2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 2 & b \end{pmatrix}$. אפשר לראות ש**תמיד** קיים לזה פתרון ולכן הקבוצה פורשת.

<u>דרך ג</u>: לפי משפט השלישי חינם. ידוע שהמימד של $\mathbb{R}^2$ הוא 2 ומצאנו קבוצה בת"ל מגודל 2 ולכן לפי המשפט זה בהכרח גם פורש ובסיס.

3. מצאו בסיס וקבעו את המימד של המרחבים הבאים:

(א) $span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

פתרון:

ברור שהקבוצה היא $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ פורשת.

כבר דירגנו בשאלה 1 וקיבלנו $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -5 & -15 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן הקבוצה ת"ל. המשתנה השלישי הוא חופשי ולכן נזרוק מהקבוצה את הוקטור השלישי ונקבל קבוצה בת"ל.

לבסוף קיבלנו שהקבוצה $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -15 \end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס. ולכן המימד הוא 2.

(ב) $span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

פתרון:

ברור שהקבוצה $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ היא פורשת.

נדרג: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ המשתנה הרביעי הוא חופשי ולכן נזרוק את הוקטור הרביעי ונקבל קבוצה בת"ל.

ולבסוף קיבלנו ש $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ הוא בסיס.

(ג) מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

פתרון:

קודם כל נמצא את הפתרון הכללי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

יש שני משתנים חופשיים ולכן המימד של הפתרונות הוא 2.

הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} s+t \\ 0 \\ s \\ t \end{pmatrix}$, ולכן $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ היא קבוצה פורשת של מרחב הפתרונות.

ומכיוון שהיא מגודל 2 אז לפי משפט השלישי חינם היא גם בת"ל ובסיס למרחב הפתרונות.

(ד) מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

פתרון:

קודם כל נמצא את הפתרון הכללי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

יש שני משתנה חופשי אחד ולכן המימד של הפתרונות הוא 1.

הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$, ולכן $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ היא קבוצה פורשת של מרחב הפתרונות.

ומכיוון שהיא מגודל 1 ברור שהיא בת"ל ולכן בסיס למרחב הפתרונות.

4. מצאו בסיס ל-$\mathbb{R}^2$ מתוך הקבוצה הפורשת הבאה: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

פתרון:

נדרג ונמצא את הוקטורים ה"מיותרים": $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

המשתנים השני והשלישי הם חופשיים ולכן נזרוק את הוקטורים השני והשלישי.

נקבל ש $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ הוא בסיס של $\mathbb{R}^2$.

5. שאלת אתגר (רשות):

(א) הוכיחו כי אם $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ הם תתי־מרחבים אזי גם $U \cap V$ הוא תת־מרחב.

פתרון:

i. נראה שזו לא קבוצה ריקה: $0 \in U, V$ ולכן $0 \in U \cap V$.

ii. נראה סגירות לחיבור: נניח $x, y \in U \cap V$, אזי $x, y \in U$ וגם $x, y \in V$. U, V הם תת־מרחבים ולכן סגורים לחיבור ולכן $x+y \in U$ וגם $x+y \in V$ וכך $x + y \in U \cap V$.

iii. נראה סגירות לכפל בסקלר: יהי $x \in U \cap V$ ו$c \in \mathbb{R}$ סקלר. $x \in U$ ו U הוא ת"מ ולכן סגור לכפל בסקלר, מה שאומר ש $cx \in U$. באותו אופן $cx \in V$ ולכן $cx \in U \cap V$.

(ב) נניח ידוע ש $\dim V = 4$ ו$\dim U = 2$, מה יכול להיות המימד של החיתוך $U \cap V$? (רשמו את כל האפשרויות).

פתרון:

נשים לב ש$U \cap V \subseteq U$ ולכן $\dim(U \cap V) \leq \dim U = 2$. ובאותו אופן $\dim(U \cap V) \leq \dim V = 4$. ולכן האפשרויות ל $\dim(U \cap V)$הם $0, 1, 2$.