

26.09.17

88-112 אלגברה לינארית 1 – קורס קיץ תשע"ז – מועד ב'

מרצים: איתמר שטיין, ארז שיינר

מתרגלים: שירה גילת, תמר בר-און, עדי בן-צבי, אלעד עטייא

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על כל 5 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 108 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).
- יש לענות על דפי הבחינה בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטיוטה, אך המחברת לא תיבדק כלל.

ניקוד	שאלה
	1
	2
	3
	4
	5
	סה"כ

## חלק א'

1. (16 נק') הוכיחו את משפטון ההחלפה של שטייניץ:

יהי  $V$  מרחב וקטורי נוצר סופית, ותהיינה  $A \subseteq V$  קבוצה בת"ל ו  $B \subseteq V$  קבוצה

הפורשת את  $V$ . אזי לכל  $a \in A$  קיים  $b \in B$  כך ש  $b \notin A \setminus \{a\}$  והקבוצה

$(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$  בת"ל.

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

2. (24 נק') תהי העתקה לינארית (אופרטור)  $T: V \rightarrow V$ , הוכיחו/הפריכו את הטענות

הבאות:

- א. אם לכל  $v \in V, v \neq 0$  מתקיים כי  $Tv \neq v$  אזי  $T$  אינה הפיכה.
- ב. קיימת העתקה לינארית  $S: V \rightarrow V$  כך ש  $T + S$  הפיכה.
- ג. אם קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש  $T^n = 0$  אזי  $\dim(\text{Ker}T) \geq \dim(\text{Im}T)$ .
- ד. אם  $\dim(\text{ker}T) = \dim(V) - 1$  ו  $T^2 \neq 0$  אזי לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $T^n \neq 0$ .

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

3. (10 נק') .

תהי מטריצה הפיכה  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

הוכיחו כי קיימת  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  כך ש  $rank(B) = 1$  וגם  $|A+B| = 1$ .

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

4. (30 נק') נביט ב  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ובתת המרחב  $W = \text{span}(S)$ , עבור

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 11 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 9 & -8 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצאו בסיס  $B$  ל  $W$  כך ש  $B \subseteq S$ .

ב. מצאו מטריצה  $A \in V$  כך ש  $A \notin W$ .

ג. מצאו בסיס  $B$  ל  $W$  כך ש  $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -13 \end{pmatrix} \in B$ .

ד. האם הקבוצה הבאה מהווה תת מרחב של  $V$ ? אם כן מצאו לה בסיס:

$$U = \{A \in W \mid A^t = -A\}$$



דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

5. (28 נק') נביט באופרטור  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  המוגדר ע"י  $T(x, y, z) = (0, x, y)$ .

נתון כי קיימים בסיסים סדורים  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$  ל  $\mathbb{R}^3$  ו  $C = \{c_1, c_2, c_3\}$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & a \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ כר ש}$$

א. מצאו את  $a$ .

ב. נתון כי  $tb_1 + sb_2 + b_3 = (0, 0, 1)$ . מצאו את  $t, s$ .

ג. הוכיחו כי  $c_1 + c_2 + c_3 \in \text{Im}T$ .

ד. נביט בבסיסים הסדורים  $E = \{b_2, b_1 + b_3, b_1 - b_3\}$ ,  $F = \{c_2, c_3, c_1\}$

מצאו את  $[T]_F^E$ .

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_