2.8.11

[תרגיל 2]

המשך מד"ר מסדר ראשון

משוואות הניתנות להעברה להומוגנית (מונח ישרים):

יהיו $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$, $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$. ישנן שתי אפשרויות:

1. הישרים מקבילים: אם $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}$, $d,e\neq 0$, אז ע"י הצבה מתאימה המשוואה הופכת לפרידה.

$dx+ey=k(ax+by) \Rightarrow u(x):=ax+by(x)$ מביא לפרידה

דוגמא: פתור את - $y'=\frac{2x+3y-4}{6x+9y+1}$.

הישרים מקבילים, כי $\frac{2}{6}=\frac{3}{9}$. נסמן: $u(x)=2x+3y(x)$

לכן $u'(x)=2+3y'$, כלומר: $y'=\frac{u'-2}{3}$. נציב במד"ר המקורית ונקבל:

$\frac{u'-2}{3}=\frac{u-4}{3u+1} \Rightarrow u'=\frac{3u-12}{3u+1}+2=\frac{9u-10}{3u+1}$ בהנחה ($u\not\equiv -\frac{1}{3}$).

($u\equiv\frac{10}{9}$ פתרון - מד"ר נפרדת, ובסופו של דבר צריך לבדוק סינגולרי, אחרי שנשלים את הבדיקה)

2. הישרים נחתכים: מבצעים את התהליך הבא - נמצא נק' חיתוך בין הישרים הנתונים:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ dx+ey+f=0 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0)$$

נגדיר משתנים חדשים:

$$\begin{cases} Y(y)=y+y_0 \Rightarrow y=Y-y_0 \\ X(x)=x+x_0 \Rightarrow x=X-x_0 \end{cases}$$

נשים לב כי: $\frac{dY}{dX}=\frac{dy}{dx}$, ולכן: $Y'(X)=\frac{AX+BY}{CX+DY}=\frac{A+B\frac{Y}{X}}{C+D\frac{Y}{X}}$

משוואה לינארית, משוואת ברנולי ומשוואת ריקטי [הנושאים הבאים של התרגול]

משוואה לינארית: משוואה בעלת הצורה הבאה (מסדר ראשון)

$y'+P(x)y=g(x)$, כאשר $P(x),g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $I\subseteq\mathbb{R}$.

שיטת הפתרון היא כדלקמן - מוצאים גורם אינטגרציה: $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}\neq 0$

כופלים את המד"ר המקורית ב-μ, ומקבלים $\mu y'+\overbrace{\mu p}^{\mu'}y=\mu g$, לכן: $(\mu y)'=\mu g$, (נב' והוספת קבוע c)

ואז: $\mu(x)y(x)=\int\mu(x)g(x)dx+C$, וכאשר נחלק ב-$\mu$ נקבל: $\boxed{y(x)=\frac{1}{\mu}\int\mu g\,dx+\frac{1}{\mu}\cdot C}$.

הערה: אם יש לנו בעיית התחלה עם מד"ר לינארית:

$$\begin{cases} y'+p(x)y=g(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

אז בשאלות קטע $I\subseteq\mathbb{R}$ המכיל את x_0, עבורו הפונקציות p,g רציפות, מתקיים שלכל $x\in I$ יש פתרון יחיד לבעיה.
(כלומר אפשר להשתמש יותר בקלות במשפט הקיום והיחידות במד"ר לינאריות).

מד"ר לינאריות - המשך

דוגמאות (קיום ויחידות):

א. פתרו: $2(y-4x^2)\,dx + x\,dy = 0$.

פתרון - המד"ר אינה מהסוג שנתקלנו בו עד כה - לא פרידה, לא הומוגנית, לא ניתנת להפרדה לצורות שלה מיידית. ננסה לחלק ב-y' ולבדוק אם היא לינארית לפי $y(x)$.

$$2(y-4x^2)+xy'=0$$
$$\Rightarrow xy'+2y=8x^2 \quad \Leftarrow (\text{נניח שעכשיו } x\neq 0)$$
$$\Rightarrow y'+\frac{2y}{x}=8x \quad ⊛$$

כעת, נמצא גורם אינטגרציה $\mu(x)$:

$$\mu(x)=e^{\int \frac{2}{x}dx}=e^{2\ln|x|}=|x|^2=x^2$$

נכפול את ⊛ ב-μ ונקבל:

$$(x^2y)'=8x^3 \xRightarrow{\text{מהגזירה}} x^2y=\frac{8x^4}{4}+c=2x^4+c$$

לכן הפתרון הכללי הוא: $\boxed{y(x)=2x^2+\frac{c}{x^2},\quad x\neq 0,\quad c\in\mathbb{R}}$

ב. האם לבעיית ההתחלה יש פתרון יחיד? מה תחום ההגדרה אם קיים, ומה הפתרון? מה יקרה אם תנאי ההתחלה ישתנה ל-$y(0)=2$?

$$\begin{cases} 2(y-4x^2)\,dx+x\,dy=0 \\ y(-1)=2 \end{cases}$$

פתרון - נשתמש במשפט הקיום והיחידות לבעיה לינארית: עבור המד"ר $y'+\underbrace{\frac{2y}{x}}_{y\cdot p(x)}=\underbrace{8x}_{g(x)}$

הפונקציות p,g רציפות כאשר $x\neq 0$, לכן נחפש תחום המכיל את $x_0=-1$ עבורו $x\neq 0$: הקטע המקסימלי בגבול שבו תנאי המשפט מתקיימים הוא: $I=(-\infty,0)$, ולכן יש לבעיה שם פתרון יחיד. נמצא אותו:

נציב את תנאי ההתחלה הנתון בפתרון הכללי של סעיף א': $x=-1, y=2$:

$$2=2+c \Rightarrow c=0 \Rightarrow \boxed{y(x)=2x^2}$$

תשובה סופית לבעיית ההתחלה: $x<0$
(כי מדובר על הקטע $(-\infty,0)$!!)

אילו תנאי ההתחלה היה $y(0)=2$, משפט הקיום והיחידות לא מתקיים, כי $p(x)$ לא רציפה שם! $\left(\frac{2}{x}\right)_{x=0}$. במקרה זה, אין פתרון לבעיית ההתחלה, כי כל הפתרונות (מסעיף א') מתוך הפתרון הכללי, אין הפתרון הכללי לא מוגדר עבור $x_0=0$.

משוואת ברנולי - צורה כללית: $y'+p(x)\cdot y=g(x)y^m,\quad m\in\mathbb{R}$.

אם $m=0,1$ זו מד"ר לינארית. אחרת, עבור $m\neq 1$, $m>0$, $y\equiv 0$ הוא פתרון למד"ר. (סוג הפתרון יתברר בהמשך, לא בהכרח בפתרון הכללי)
אם $m<0$, הפונק' הנ"ל ($y\equiv 0$) לא פתרון.

נניח ש- $y\not\equiv 0$, אז נחלק את המד"ר המקורית ב-y^m:

$$\underbrace{y^{-m}y'}_{\frac{z'}{1-m}}+p(x)\underbrace{y^{1-m}}_{\text{נסמן כ-}z(x)}=g(x)$$

נסמן $z(x)=y^{1-m}(x)$, לכן $z'(x)=(1-m)y^{-m}y'$, ולכן נקבל:

$$\frac{z'}{1-m}+p(x)\cdot z=g(x) \Rightarrow \boxed{z'+(1-m)p(x)z=(1-m)g(x)}$$

← זוהי מד"ר לינארית עבור z

$\boxed{\text{תרגול 2 מד"ר}}$ 2.8.11

משוואת ברנולי - המשך:

דוגמא:

$$\begin{cases} x^2dy+(2xy-y^3)dx=0 \\ y(1)=1 \end{cases}$$ (פתור)

פתרון: אם נחלק ב- dx ע"מ לרשום את המשוואה בצורה:

$$x^2y'+2xy-y^3=0 \quad /:x^2,\ x\neq 0 \Rightarrow \boxed{y'+\underbrace{\frac{2}{x}}_{p(x)}y=\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)}y^3} \leftarrow \text{ברנולי}$$

$m=3$, לכן $y\equiv 0$ פתרון.

עבור $y\neq 0$ נחלק ב- y^3: $(z:=y^{-2})$

$$\boxed{y^{-3}y'+\frac{2}{x}y^{-2}=\frac{1}{x^2}}$$

$$z'=-2y^{-3}y' \Rightarrow (*)\ z'-\frac{4}{x}z=-\frac{2}{x^2},\quad x\neq 0$$

מד"ר לינארית ב- z

גורם אינטגרציה:

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{4}{x}dx}=e^{-4\ln|x|}=\frac{1}{x^4}$$

נכפול $(*)$ ב- μ ונקבל:

$$\left(\frac{1}{x^4}z\right)'=-\frac{2}{x^6} \xRightarrow{\text{אינ'}} \frac{1}{x^4}z(x)=\frac{-2x^{-5}}{-5}+c=\frac{2}{5x^5}+c$$

ומכאן:

$$\Rightarrow z(x)=\frac{2}{5x}+cx^4,\quad c\in\mathbb{R}$$

נחזור ל- y:

$$z(x)=y^{-2}(x)=\frac{1}{y^2(x)} \Rightarrow y^2(x)=\frac{1}{z(x)}=\frac{1}{\frac{2}{5x}+cx^4}$$

$$y(x)=\pm\sqrt{\frac{1}{\frac{2}{5x}+cx^4}}$$: (מוגדר כל עוד המכנה שונה מאפס וחיובי $x\neq 0$)

$\boxed{\text{הפתרון } y\equiv 0 \text{ שקטף מהפתרון הכללי עבור } c\to\infty \text{, ולכן הוא נחשב לפתרון ברנולי.}}$

נציב את תנאי ההתחלה: $y(1)=1$ - $1=\pm\sqrt{\frac{1}{\frac{2}{5}+c}}$.

$$\Rightarrow 1=\frac{1}{\frac{2}{5}+c} \Rightarrow c=\frac{3}{5} \Rightarrow y(x)=+\sqrt{\frac{1}{\frac{2}{5x}+\frac{3}{5}x^4}}$$

תחום ההגדרה - לפי קיום ויחידות, חייבים לבחור תחום עבורו המכנה $\neq 0$, כדי שפה יהיה רציף:

$$y'=\frac{y^3-2xy}{x^2} \Rightarrow x>0 \quad (\text{מהמשפט})$$

כמו כן, נדרוש ש: $\frac{2}{5x}+\frac{3}{5}x^4>0 \Leftarrow 2+3x^5>0 \Leftarrow 3x^5>-2$,

ולכן בסה"כ $\underline{x>0}$!

משוואת ריקטי - מד"ר מהצורה:

$$y'+p(x)y+q(x)\cdot y^2=g(x)$$

(אם $q(x)\equiv 0$ זו מד"ר לינארית, ואם $p\equiv 0$ זה ברנולי)

בהינתן שקיים פתרון פרטי כלשהו $y_1(x)$, נציב הצבה: $y(x)=y_1(x)+\frac{1}{u(x)}$,

כאשר $u(x)\neq 0$ פונקציה לא ידועה. נקבל לאחר ההצבה מד"ר לינארית ב- $u(x)$.

דוגמא: לפתור את המשוואה - $y'+2e^xy-y^2=e^{2x}+e^x$, כשנתון: $y_1(x)=e^x$

הערה: אפשר לנסות למצוא פתרון פרטי, כלומר לנחש אותו, ע"י הצבה $y_p(x)=Ae^x$ (בגלל הצורה של אגף ימין).

ואז נמצא $A=1$ ונקבל את הפתרון הנתון.

פתרון - נציב לפי הסעיף - $u\neq 0$, $y(x)=e^x+\frac{1}{u(x)} \Rightarrow y'(x)=e^x-\frac{u'}{u^2}$. נציב במד"ר, ונקבל:

$$e^{2x}+e^x=e^x-\frac{u'}{u^2}+2e^x\left(e^x+\frac{1}{u}\right)-\left(e^x+\frac{1}{u}\right)^2$$

לכן

$$\Rightarrow e^x-\frac{u'}{u^2}+2e^{2x}+\frac{2e^x}{u}-e^{2x}-\frac{2e^x}{u}-\frac{1}{u^2}=e^{2x}+e^x$$

$$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2}-\frac{1}{u^2}=0 \quad /\cdot(-u^2)\neq 0 \Rightarrow u'=-1 \Rightarrow u(x)=-x+c$$

$$\boxed{y(x)=e^x+\frac{1}{c-x},\quad c\in\mathbb{R}}$$

משוואה מדויקת, גורמי אינטגרציה

בהינתן משוואה בצורת מספר השונין: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

היא נקראת מד"ר מדויקת (או משוואה פוטנציאל) **אם** קיימת פונקציה $\varphi(x,y)$ (הנקראת גם פוטנציאל), שהיא C^1 בתחום D (בעלת נגזרות חלקיות רציפות ב-D), ומקיימת:

$$\vec{\nabla}\varphi(x,y) = (M(x,y), N(x,y)),$$

כלומר:

$$\begin{cases} \varphi'_x = M \\ \varphi'_y = N \end{cases}.$$

תנאי מספיק לכך שהמד"ר תהיה מדויקת ב-D (שניהם דרושים):

- M, N בעלות נגזרות חלקיות רציפות ב-D
- $M'_y = N'_x$ ב-D.

מה קורה אם המד"ר לא מדויקת? הופכים אותה לכזו! (באמצעות גורם אינטגרציה)

מחפשים פונק' $\mu(x,y)$ כך שאם נכפול ב-μ (משני האגפים) את המד"ר המקורית נקבל: משוואה מדויקת ב-D $\leftarrow$ $(\mu M)\,dx + (\mu N)\,dy = 0$

כלומר, $\mu M, \mu N$ ב-$C^2(D)$. כמו כן, $(\mu M)'_y = (\mu N)'_x$ ב-D.

$$\Rightarrow \cancel{\mu'_y M} \quad \mu'_y \cdot M + \mu \cdot M'_y = \mu'_x N + \mu \cdot N'_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu(x,y)\left[M'_y - N'_x\right] = \mu'_x N - \mu'_y M} \leftarrow$$

זו מד"ח על μ, המבטיחה שזה גורם אינט' עבור המד"ר.

נגביל את עצמנו לחיפוש של גורם אינט' במקרים הפרטיים הבאים:

1. אם הביטוי $h(x) := \dfrac{M'_y - N'_x}{N}$ תלוי רק ב-x, אז גורם האינט' תלוי רק ב-x, והוא:
$$\mu(x) = e^{\int h(x)\,dx}$$

2. אם הביטוי $g(y) := \dfrac{N'_x - M'_y}{M}$ תלוי רק ב-y, אז גם גורם האינט' תלוי רק ב-y והוא:
$$\cancel{\mu}(x) = e^{\int g(y)\,dy}.$$

3. אם הביטוי $f(xy) = \dfrac{M'_y - N'_x}{yN - xM}$ תלוי רק ב-$x \cdot y$, אז:
$$\mu(x,y) = \mu(xy) = e^{\int f(xy)\,d(xy)}.$$

4. מהו הביטוי שצריך לבדוק כדי להבטיח ש-$\mu(x,y) = \mu(ax+by)$, $a,b \in \mathbb{R}$ יהיה גורם אינטגרציה? תשובה - נגזור את המשוואה שלנו לפי x ולפי y, ונקבל:
$$\mu(ax+by) = e^{\int \frac{M'_y - N'_x}{aN - bM}\,d(ax+by)}$$
(תלוי רק בביטוי $ax+by$).

המשך – גורמי אינטגרציה

הוכחת התנאי (3) לקיום גורם אינטגרציה:

נניח כי קיים: $\mu(x,y)=\mu(xy)$. נגזור לפי x, ולפי y, ונקבל:

$$\mu'_x(x,y)=\mu'(xy)\cdot y$$

$$\mu'_y(x,y)=\mu'(x,y)\cdot x$$

נציב $\Longrightarrow$ $\boxed{\mu(x,y)\left[M'_y-N'_x\right]=\mu'_x N-\mu'_y M}$ (*)

נציב בתנאי המספיק ש-μ גורם אינט':

$$\mu(x,y)\left[M'_y-N'_x\right]=\mu'(xy)yN-\mu'(xy)xM$$

$$\Rightarrow \mu(x,y)\cdot\left[M'_y-N'_x\right]=\mu'_{(xy)}\left[yN-xM\right]$$

$$\overset{\mu\neq 0}{\Rightarrow} \frac{\mu'}{\mu}(xy)=\frac{M'_y-N'_x}{yN-xM}=f(xy)$$

כדי שיתקיים השוויון צריך שהאגף הימני יהיה תלוי ב- xy בלבד.

$$\Rightarrow \ln|\mu(xy)|=\int f(xy)\,d(xy)$$

$$\Rightarrow \mu(xy)=e^{\int f(xy)\,d(xy)}$$

הוכחת תנאי (4): נגזור התנאה לפי x ולפי y, ונקבל:

$$\mu'_x(x,y)=a\mu'(ax+by)$$

$$\mu'_y(x,y)=b\mu'(ax+by)$$

נציב ב-(*) ונקבל:

$$\Rightarrow \mu(ax+by)\left[M'_y-N'_x\right]=a\mu'(ax+by)N-b\mu'(ax+by)M$$

$$\overset{\mu\neq 0}{\Rightarrow} \frac{\mu'}{\mu}(ax+by)=\frac{M'_y-N'_x}{aN-bM}$$

רוצים שהביטוי יהיה תלוי רק ב- $ax+by$

$$\Rightarrow \mu(ax+by)=e^{\int\frac{M'_y-N'_x}{aN-bM}\,d(ax+by)}$$

איך פותרים משוואה מדויקת? מוצאים $\varphi(x,y)$, והפתרון הכללי למשוואה יהיה: $\underline{\varphi(x,y)=c,\quad c\in\mathbb{R}}$.