17.1.16.

תורת הקבוצות

תרגול 11

טענה: קיימת שבת שהמשלים שלה שבת.

תזכורת: (למת פודור). (עובד ינום).

לכל $f:\alpha\to\alpha$ נסוגה דוחסת שם לכל $\beta<\alpha$, $f(\beta)<\beta$.

אם כלומר אומרת של S שבת

ב- α ו- $f:S\to\alpha$ פונקציה דוחסת

יש $T\subseteq S$ שבת כך ש- $f\restriction T$ קבועה.

הוכחה: נעבור כלמה, ונגדיר $C=\{$אוסף הגבוליים ב- $\omega_1\}$

C שבת (כי כל סגורה יש גבולי)

לכל $\alpha\in C$ יש סדרה (עולה) שאיבריה $\{\alpha_i\}_{i<\omega}$ כך ש- $\lim\alpha_i=\alpha$

(משתמשים פה ב- A.C. - בחירת סדרה).

~~[illegible]~~ נגדיר ω פונקציות: $f_i:C\to\omega_1$

$f_i(\beta)=\beta_i$ (לכל $\beta\in C$ גבולי ולכן יש לו β_i שהוא האיבר ה- i בסדרה שבחרנו).

f_i דוחסת שכן $\forall\beta\in C\ f_i(\beta)<\beta$

מלמת פודור קיימת $T_i\subseteq C$ קבוצה שבת

כך ש- $f_i\restriction T_i$ פונקציה קבועה.

כלומר $T_i=\{\alpha\in C / f_i(\alpha)=t\}$.

נראה שקיים i כך ש- T_i^c גם שבת!

נניח בשלילה שלא. כלומר לכל i. T_i^c אינה שבת.

כלומר לכל i יש סגורה S_i כך ש- $S_i\cap T_i^c=\emptyset$

$\Leftarrow$ $S_i\subseteq T_i$. $\Leftarrow$ $\bigcap S_i\subseteq\bigcap T_i$ סגורה.

~~[illegible]~~ אבל $\bigcap T_i=\{\alpha\in C/\forall i\ f_i(\alpha)=t_i\}$

אבל t_i הוא האיבר ה- i בסדרה של α.

ולכן $\bigcap T_i\subseteq\lim t_i$ ולכן $\bigcap T_i$ לכל היותר קבוצה בת איבר אחד, וזה לא יכול להכיל סגורה! סתירה.

מ.ש.ל!

נשים לב שאנחנו יודעים קיום של קבוצה T_i שבת רק
ש- T_i^c גם שבת. אבל אין לנו דרך להבחין
ש צאת ב- T_i. וזה קורה בגלל השימוש ב- A.C.

<u>דוגמא:</u> ניתן דוגמא ל- $A\subseteq\omega_1$ איננה <u>שבת</u>
ופונקציה דוחסת $f:A\to\omega_1$ כך שהמקור של כל
איבר ב- ω_1 אינו שבת.

תהיה $A\subseteq\omega_1$. כלומר יש C סגור כך ש- $A\cap C=\emptyset$.
נגדיר $f:A\to\omega_1$ ע"י, לכל $\alpha\in A$ $f(\alpha)=\sup(C\cap\alpha)$
נשים לב שבגלל ש- C סגורה $f(\alpha)\in C$.
נשים לב ש- f <u>דוחסת</u> כי $f(\alpha)\le\alpha$
אבל $\alpha\notin C$ ולכן $f(\alpha)\neq\alpha \Rightarrow f(\alpha)<\alpha$.
נראה שהמקור של כל איבר אינו שבת.
יהי $\gamma\in\omega_1$. נראה ש- $f^{-1}(\gamma)$ אינו שבת
C קונפי' לכן יש $\gamma_1\in C$ כך ש- $\gamma<\gamma_1\in C$
אם $f(\alpha)=\gamma$ אז $\alpha\le\gamma_1$
כי אם $\gamma_1<\alpha$ אז $\gamma_1\in C\cap\alpha$
ואז $\gamma=f(\alpha)=\sup(C\cap\alpha)\ge\gamma_1$ סתירה!
ולכן $\alpha\le\gamma_1$. לכן $f^{-1}(\gamma)\le\gamma_1$. לכן חסום!
כל קבוצה שבת איננה חסומה. ולכן $f^{-1}(\gamma)$ לא שבת!
והראנו שיש $f:\omega_1\to\omega_1$ דוחסת על A.
והמקור של כל ב- ω_1 לא שבת!

משפט: (רמזי).

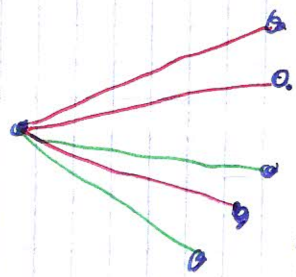
נוכיח מהמקרה הקל של שני צבעים:

לכל צביעה של הגרף המלא (כל שני קודקודים מחוברים בקשת)

על ω . הגרף יכול לתת גרף אינסופי שלם מונוכרומטי!

הוכחה: (אינטואיטיבית).

נבחר קודקוד v_1.



v_1

יוצאות ממנו קשתות

אדומות וירוקות לכל שאר

הקודקודים, בהכרח אחד מהצבעים

מופיע אינסוף פעמים (בה"כ ירוק).

נצמצם רק לקודקודים שמתחברים ל-v_1 בירוק.

נסמן אותם בקבוצה V_1.

אם יש $v_2 \in V_1$ שמתחבר ל-∞ קודקודים אחרים

ב-V_1 בירוק, ניקח אותו.

נסמן כך את הקודקודים שמחוברים ל-v_2 בצבע ירוק V_2.

ובעצם $V_2 \subseteq V_1$ אינסופית, נניח שתמיד אפשר

להמשיך ככה, ונקבל סדרה $V_\infty = \{v_i\}$

V_∞ הוא בעצם גרף שביקשנו, כי לכל $v_i, v_j \in V_\infty$

נקבל $v_i, v_j \in V_{\min\{i,j\}}$ ובכל מקרה הם מחוברים בצבע ירוק.

אבל אם לא נוכל להמשיך כך תמיד. כלומר נגיע

לשלב בו יש לכל קודקוד חיבור למס' סופי עם הצבע ירוק.

נניח V_i כך שלא ניתן למצוא בו $v \in V_i$

שמחובר ל-∞ קודקודים אחרים ב-V_i בצבע ירוק.

כלומר כל קודקוד ב-V_i מחובר למספר סופי של קודקודים

עם הצבע ירוק. כלומר לכל $v \in V_i$ יש מספר קו-סופי

של קודקודים שמחוברים אליו באדום. נבחר קודקוד כלשהו ב-V_i

ונפעיל שוב את התהליך אותו! בוודאות לא נתקע!

למה? כי כל קודקוד $\tilde{v}_i$ מחובר ל-∞ אחרים באדום!
(אחרת יש מס' סופי של אדומים כלומר ∞ ירוקים!)
מ.ש.ל!

כעת נוכיח הרמזי״י בשפה יותר כללית.

<u>משפט:</u> לכל A אינסופית $|A|=\omega$ ולכל צביעה של $[A]^d$

יש $B\subseteq A$ אינסופית, $|B|=\omega$, כך ש- $[B]^d$ מונו'.

<u>הוכחה:</u> נוכיח באינדוקציה על d.

<u>בסיס:</u> $d=1$ - כלומר לצבוע נקודות,
ברור שיש תת קבוצה אינסופית מונוכרומטית.

<u>צעד:</u> נניח נכונות עבור $d=n$ ונוכיח עבור $d=n+1$.
ונבחר $v\in A$. ונניח שנתונה צביעה של $[A]^{n+1}$
כמו פעמים, נבחר $v\in A$.
ונגדיר צביעה חדשה של $[A\setminus\{v\}]^n$ ע"י
$$C^\sim(\{v_1\dots v_n\}) = \underset{\text{(הנתונה)}}{C}(\{v_1\dots v_n, v\}) \quad \text{(צביעה חדשה)}$$

מהנחת האינדוקציה יש תת קבוצה $B\subseteq A\setminus\{v\}$ אינסופית
כך ש- $[B]^n$ הומוגניות. (בה"כ בצבע ירוק).
נסמן $w_1=v$. גם יש $w_2\in \bar{W}_1=B$.
כך שיש קבוצה אינסופית ב-$\bar{W}_1$ כך שכל n-יה
בקבוצה הזו תהיה ירוקה תחת $C^\sim$.
כלומר נדרוש $C(\{v_1\dots v_n, w_2\}) = C^\sim(\{v_1\dots v_n\})$ יהיה ירוק
שכבר ירוק.
לקבוצה הזו נקרא $\bar{W}_2$. נקבל $\bar{W}_1\supseteq\bar{W}_2\supseteq\bar{W}_3\dots$
אם אפשר להמשיך ככה, הסדרה שתתקבל $\bar{W}_\infty=\{w_i\}$
היא תהיה הקבוצה המבוקשת. ניקח $w_{j_1}\dots w_{j_{n+1}}\in\bar{W}_\infty$
אז בה"כ j_1 האינדקס הקטן ואז $\{w_{j_2}\dots w_{j_{n+1}}\}\subseteq\bar{W}_{j_1}$
ואכן הצביעה ירוקה! אם נתקע בירוק, נעבור לאדומים
ושם מובטח לנו שלא נתקע!! הדרוש! מ.ש.ל!

שאלה: אם κ מונה כלשהו ונצבע את $[\kappa]^2$ בשני צבעים. האם אפשר בבחירה למצוא $A\subseteq\kappa$ $|A|=\kappa$ כך ש- A מונו'?

תשובה: אם κ מונה סינגולרי (חריג), כלומר $cof(\kappa)<\kappa$ אז התשובה היא **לא!**

נסמן $\alpha=cof(\kappa)$, וקיימת $g:\alpha\to\kappa$ קופינלית ושומרת סדר. ונגדיר $f:\kappa\to\alpha$

ע"י $f(\beta)=\min_{\gamma<\alpha}\{g(\gamma)/g(\gamma)>\beta\}$ ← הראשון בתמונה... [illegible]

... α ע"י g. $f(\beta)=\min(g[\alpha]\cap\beta^c)$ כלומר (שאחרי β)

כעת נגדיר צביעה של $[\kappa]^2$ ע"י $(\beta_1,\beta_2)=1$ $\iff$ $f(\beta_1)=f(\beta_2)$ ואחרת 0.

תהי $A\subseteq\kappa$ מעוצמה κ. $f|_A: A\to\alpha$

לא חח"ע! ולכן יש $\beta_1,\beta_2\in A$ כך ש- $(\beta_1,\beta_2)=1$ -

לא יכול להיות **שלכל** $\beta_1,\beta_2\in A$ $(\beta_1,\beta_2)=1$.

כי זה אומר ש- $f(\beta_1)=f(\beta_2)$ כלומר יש $\gamma\in\alpha$

כך ש- $g(\gamma)$ גדול **מכל** איברי A. אבל $|A|=\kappa$

ולכן A לא חסומה! ולכן A אינה מונו-כרומטית!

כנדרש. מ.ש.ל!

הגדרה: מסנן מעל α הוא את הקבוצה $\hat{I}$ של $P(\alpha)$ שמקיימת:

1. סגורה לחיתוכים סופיים.
2. אם $A\in\hat{I}$ ו- $A\subseteq B$ אז $B\in\hat{I}$.

מסנן "יקרא אמיתי" $\iff$ $\emptyset\notin\hat{I}$

הגדרה: מסנן "יקרא על מסנן" אם לכל $A\in\alpha$ או $A^c\in\hat{I}$ או $A\in\hat{I}$.

"על מסנן" **שקול** למסנן מקסימלי.

טענה: כל מסנן מוכל באו"מ (בלמה של צורן).

דוגמה: מסנן ראשי. ניקח $B\subseteq\alpha$.

$$\hat{I}_B=\{C\subseteq\alpha \,/\, B\subseteq C\}$$ - !

טענה: בקבוצה אינסופית A קיים מסנן לא ראשי.
(ניקח את כל הקבוצות הקו-סופיות)

מסקנה: אם A אינסופית קיים או"מ לא ראשי.
(ניקח או"מ שמכיל את כל הקו-סופיות).

תרגיל: נניח $\hat{I}$ או"מ. אם $A\cup B\in\hat{I}$
אז $A\in\hat{I}$ או $B\in\hat{I}$.

הוכחה: אחרת $A,B\notin\hat{I}$ $\Leftarrow$ $A^c,B^c\in\hat{I}$
ולכן $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c\in\hat{I}$ וזו סתירה!

הוכחה: ~~[illegible]~~ (משפט רמזי). יהי V גרף אינסופי. ויהי $U=\hat{I}$ או"מ לא ראשי על קודקודי הגרף. (המסנן הקו-סופי שאותו הרחבנו).
נניח שצבענו את $[V]^2$ ב-K צבעים.
נבחר $v\in V$. נסמן ב-$V_i(v)$ את הקודקודים שמחוברים ל-v בצבע i!
מתקיים $\bigcup V_i(v)=V-\{v\}$. כיוון שזה או"מ לא ראשי אז $\{v\}\notin U$ ולכן $V-\{v\}\in U$.
מהטענה שראינו קודם. יש i רק 1 ש-$V_i(v)\in\hat{I}$.
יש i_0 שמופיע ∞ פעמים, וניקח את ה-i_0 הזה.
יהיה בתוך תת גרף אינסופי ומונוכרומטי בצבע i_0.
נסתכל רק על קבוצת הקודקודים ב-V שעבורם $V_i(v)\in\hat{I}$ עבור אותו i שקבענו. נסמנה ב-X וניקח $v_1\in X$

$$X=\{v\in V \,/\, V_{i_0}(v)\in\hat{I}\}$$

אז $V_{i_0}(v_1)\in\hat{I}$
כל קבוצה ב-$\hat{I}$ לא ריקה!

ניקח $V_2 \in V_{i_0}(V_1)\cap X$ כי החיתוך לא ריק.

(נניח $X \in \hat{I}$).

ולכן $V_2 \in X$ ולכן $V_{i_0}(V_2) \in \hat{I}$

לכן $V_{i_0}(V_1) \cap V_{i_0}(V_2) \cap X$ גם במסנן

ניקח V_3 בחיתוך הנ"ל. וכן $V_{i_0}(V_3)$ גם במסנן.

תמיד חיתוכים מס' סופי של קבוצות במסנן. ולכן תמיד

החיתוך יהיה במסנן ובפרט לא ריק!

וכדומה נקבל סדרה V_∞ שהיא הגבול המבוקש!

(בעיקר / במילא נכונה שבאמת $X \in \hat{I}$.)

מ.ש.ל!