שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

פתרון תרגיל בית 5 - טופולוגיה

שאלה 1

הגדרה: יהי $\left(X,\|\ \|\right)$ מרחב נורמי. נאמר ש- $A\subseteq X$ חסומה בנורמה אם קיים $0<M\in\mathbb{R}$ כך ש- $\|x\|\le M \quad : \quad \forall x\in A$.

תהיינה $\|\ \|_1,\|\ \|_2$ נורמות שקולות מעל מרחב וקטורי X (כלומר קיימים $a,b>0$ כך שלכל $x\in X$, $\|x\|_1\le a\|x\|_2 \wedge \|x\|_2\le b\|x\|_1$).

א) תהי A חסומה ב- $\left(X,\|\ \|_1\right)$. הוכיחו ש- A חסומה ב- $\left(X,\|\ \|_2\right)$.

ב) תהי A חסומה ב- $\mathbb{R}^2$ עם המטריקה האוקלידית. האם A חסומה בהכרח ב-$\left(\mathbb{R}^2,d_{\max}\right)$? הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית.

ג) תהי d מטריקה שקולה למטריקה האוקלידית ונניח ש- A חסומה ב- $\left(\mathbb{R}^2,d\right)$. האם A חסומה בהכרח ב- $\left(\mathbb{R}^2,d_{\max}\right)$? הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית.

פתרון

א) משקילות הנורמות קיים $b>0$ כך ש $\|x\|_2\le b\|x\|_1$. A חסומה ב- $\left(X,\|\ \|_1\right)$ ולכן קיים $0<M\in\mathbb{R}$ כך ש $\|x\|_1\le M \quad : \quad \forall x\in A$. מכאן, $\|x\|_2\le b\|x\|_1\le bM$ לכל $x\in A$.

ב) המטריקות הן שקולות ולמעשה מתקבלות מנורמות שקולות (בדקו!). קל להוכיח שתת קבוצה חסומה במרחב נורמי אם ורק אם היא חסומה במרחב המטרי (עם המטריקה המושרית מהנורמה). לכן מסעיף א' נקבל שאכן אם A חסומה ב- $\mathbb{R}^2$ עם המטריקה האוקלידית אז היא גם חסומה ב $\left(\mathbb{R}^2,d_{\max}\right)$.

ג) קחו כל מטריקה **חסומה** d השקולה לאוקלידית (דוגמאות ניתן למצוא בתרגיל בית 4 שאלה 6). מתקיים $\mathbb{R}^2$ חסומה ב- $\left(\mathbb{R}^2, d\right)$ אך ברור ש $\mathbb{R}^2$ אינה חסומה ב $\left(\mathbb{R}^2, d_{\max}\right)$.

מש"ל

<u>שאלה 2</u>

א. נתבונן ב- $\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. נאמר ש- $C \subseteq \mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה אם $C = A \bigcup T$ כאשר: A היא תת קבוצה סגורה של $\mathbb{R}$ <u>בטופולוגיה האוקלידית</u>, ו- T היא תת קבוצה כלשהי של S. הוכיחו שהמשלימים של הקבוצות הסגורות הללו יוצרים טופולוגיה על $\mathbb{R}$.

<u>הדרכה</u>: קודם כל, תוכיחו שזאת טופולוגיה ע"י כך שתראו את שלוש התכונות על קבוצות סגורות (ולא הפתוחות). שנית, כאשר תבדקו שחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא סגור, היעזרו בכך שמתקיים:

$$C = \bigcap_{i \in I} \left(A_i \bigcup T_i\right) = \bigcap_{i \in I} A_i \bigcup \left(C \setminus \bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

ב. נתבונן בקבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ ולכל $n \in \mathbb{Z}$ נגדיר $O_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$. נסמן $\tau = \{\varnothing, \mathbb{Z}\} \bigcup \{O_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. הוכיחו:

1. $(\mathbb{Z}, \tau)$ מרחב טופולוגי.

2. $(\mathbb{Z}, \tau)$ אינו מטריזבילי.

<u>פתרון</u>

<u>סעיף א'</u>

נוכיח שזו טופולוגיה על ידי שנראה שמתקיימות 3 התכונות החלות על קבוצות סגורות.

1. $\varnothing$ סגורה, שכן $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$ (הקבוצה הריקה סגורה בטופולוגיה האוקלידית וכמובן $\varnothing \in P(S)$).
$\mathbb{R}$ סגורה, שכן $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \varnothing$ ($\mathbb{R}$ סגור בטופולוגיה האוקלידית וכמובן $\varnothing \in P(S)$).
2. איחוד סופי: יהיו C_1, C_2 קבוצות סגורות, כלומר הן מהצורה $C_i = A_i \cup T_i$ כאשר A_i סגורה ב-$\mathbb{R}$ ו- $T_i \subseteq S$ (עבור $i \in \{1,2\}$). נתבונן באיחוד: $C_1 \cup C_2 = (A_1 \cup A_2) \cup (T_1 \cup T_2)$. מתקיים $T_1 \cup T_2 \in P(S)$ וכן $A_1 \cup A_2$ סגורה ב-$\mathbb{R}$ כאיחוד סופי של סגורות.
3. חיתוך כלשהו: יהי $\{C_i\}_{i \in I}$ אוסף של קבוצות סגורות, כלומר $C_i = A_i \cup T_i$ (כמקודם), ונראה שחיתוכן הוא קבוצה סגורה. נסמן $C = \bigcap_{i \in I} C_i$.

קל לבדוק שמתקיים $C = \bigcap_{i \in I}(A_i \bigcup T_i) = \bigcap_{i \in I} A_i \bigcup \left(C \setminus \bigcap_{i \in I} A_i \right)$ (שימו לב ש- $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq C$). קודם כל, $\bigcap_{i \in I} A_i$ סגורה ב-$\mathbb{R}$ (כחיתוך של סגורות), שנית $C \setminus \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq S$. הסבר להכלה: יהי $x \in C \setminus \bigcap_{i \in I} A_i$ ולכן $x \in \bigcap_{i \in I}(A_i \cup T_i)$. אם $x \in A_i$ לכל $i \in I$ נקבל סתירה שכן $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ ולכן קיים i_0 כך ש- $x \in T_{i_0}$ ומכיוון ש- $T_{i_0} \subseteq S$ נקבל הדרוש.

<u>סעיף ב'</u>

<u>תת סעיף 1</u>

נוכיח שזו טופולוגיה:

א. $\varnothing, \mathbb{Z} \in \tau$ מההגדרה;

ב. חיתוך: יהיו $U_1, U_2 \in \tau$. אם אחת מהקבוצות היא ריקה אזי החיתוך ריק והטענה ברורה. אם אחת מהקבוצות היא המרחב כולו הטענה גם כן

ברורה. אם כן, נניח ששתי הקבוצות שונות מהקבוצה הריקה ומהמרחב כולו. לכן קיימים $n,m \in \mathbb{Z}$ כך ש- $U_1 = O_n, U_2 = O_m$. נניח בה"כ $m \geq n$.
מתקיים $O_n \cap O_m = O_m \in \tau$.

ג. איחוד: יהי $\{U_i\}_{i \in I}$ אוסף של קבוצות פתוחות. נניח שהן כולן שונות מהמרחב כולו (אחרת הטענה ברורה). אם כולן ריקות גם כן הטענה ברורה. ניתן להניח בה"כ שלכל $i \in I$ $U_i = O_{n_i}$ עבור איזשהו $n_i \in \mathbb{Z}$.

נתבונן באיחוד $\bigcup_{i \in I} U_i$. אם קבוצת האינדקסים $\{n_i : i \in \mathbb{Z}\}$ אינה חסומה מלרע, אזי $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathbb{Z}$ (למה?) וזו קבוצה פתוחה. אחרת, $\{n_i : i \in \mathbb{Z}\}$ חסומה מלרע וכתת קבוצה של המספרים השלמים יש לה מינימום n_{i_0}.
אזי $\bigcup_{i \in I} U_i = U_{i_0}$ ולכן $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

<u>תת סעיף 2</u>

המרחב אינו מטריזבילי, שכן הנקודון $\{1\}$ (למשל) אינו סגור, שכן הקבוצה $\{1\}^C = \{..., -2, -1, 0\} \cup \{2, 3, 4, ...\}$ אינה פתוחה.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

תזכורת:

תהי Y קבוצה כלשהי, ותהי $p \notin Y$ ויהי $X = \{p\} \cup Y$. נגדיר
$\tau = \left\{ O \subseteq X : p \notin O \ \vee \ \left|O^c\right| \leq \aleph_0 \right\}$.

א. הוכיחו ש-(X, τ) הוא מרחב טופולוגי.
ב. נניח ש- $|X| \leq \aleph_0$. הוכיחו כי $\tau = \tau_{disc}$.
ג. בתנאי סעיף ב', האם (X, τ) מטריזבילי?

<u>פתרון</u>

א. נבדוק את התכונות. $\varnothing \in \tau$ שכן $p \notin \varnothing$. $X \in \tau$ שכן $\left|X^c\right| = 0 \le \aleph_0$.

החיתוך: יהיו $U,V \in \tau$. אם p לא שייכת לאחת מהן, אזי לא שייכת לחיתוך וסיימנו. אחרת p שייכת לשתיהן ולכן $|V^C| \le \aleph_0, |U^C| \le \aleph_0$.
מתקיים $\left|\left(U \bigcap V\right)^C\right| = \left|U^C \bigcup V^C\right| \le |U^C| + |V^C| \le \aleph_0$ ולכן $U \bigcap V \in \tau$.

האיחוד: יהי $\{U_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות פתוחות. אם p לא נמצאת באף אחת מהקבוצות, אזי היא לא נמצאת באיחוד וסיימנו. אחרת, קיים k כך ש- $p \in U_k$ ולכן $|U_k{}^C| \le \aleph_0$. מתקיים $\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^C = \bigcap_{i\in I} U_i{}^C \subseteq U_k{}^C$ ולכן
$\left|\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^C\right| \le \left|U_k{}^C\right| \le \aleph_0$.

ב. ברור שמתקיים $\tau \subseteq \tau_{disc}$. נוכיח את ההכלה ההפוכה. נוכיח שכל נקודון הוא פתוח. עבור $x \in X$, אם $x \ne p$ אזי $p \notin \{x\}$ ולכן $\{x\}$ פתוח. גם הנקודון $\{p\}$ פתוח שכן $|\{p\}^C| \le \aleph_0$.

ג. כן, על ידי המטריקה הדיסקרטית.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

<u>תזכורת</u>

נתבונן ב- $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה T הבאה:

קבוצה היא פתוחה אם היא איחוד של קבוצות מהצורה $[a,b)$ (זהו הישר של סורגנפריי).

א. הוכיחו כי T אכן טופולוגיה.

ב. הוכיחו שהטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$, שנסמנה להלן ב τ (המתקבלת ע"י המטריקה הרגילה), מקיימת $\tau \subset T$ (הכלה אמיתית!).

ג. הוכיחו שהסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ מתכנסת בטופולוגיה של סורגנפריי.

פתרון

א. קבוצה ריקה: מתקבלת כאיחוד ריק.

המרחב כולו: מתקבל כאיחוד של $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n,n)$.

סגירות ביחס לחיתוך סופי: מספיק להתבונן בשתי קבוצות מהצורה $[a,b),[c,d)$ (מדוע?). יתכנו שתי אפשרויות: אם החיתוך ריק, הטענה מתקיימת. אחרת, $[a,b)\cap[c,d)=[e,f)$ כאשר $e=\max\{a,c\},\ f=\min\{b,d\}$.

סגירות ביחס לאיחוד: טריוויאלי.

ב. ברור ש $T \not\subset \tau$ כי למשל $[2,3)\in T\setminus\tau$. נראה ש $\tau\subseteq T$ וזה יוכיח בסה"כ ש- $\tau\subset T$. תהי $O\in\tau$ אזי לכל $x\in O$ קיים $\varepsilon_x>0$ (יש תלות ב x) כך ש $B(x,\varepsilon_x)\subseteq O$. מתקיים $O\subseteq\bigcup_{x\in O}\left[x,x+\varepsilon_x\right)\subseteq\bigcup_{x\in O}B(x,\varepsilon_x)\subseteq O$, לכן $O=\bigcup_{x\in O}\left[x,x+\varepsilon_x\right)$ ומכאן $O\in T$.

ג. נוכיח שהסדרה $\frac{1}{n}$ מתכנסת ל 0 במ"ט זה. תהי U סביבה של 0 אזי U היא איחוד של קטעים מהצורה $\left[a,b\right)$ לכן קיים קטע $\left[a,b\right)$ כך ש $0\in\left[a,b\right)\subseteq U$ ולכן גם מתקיים $a\le 0<b$. $0\in\left[0,b\right)\subseteq\left[a,b\right)\subseteq U$. $0<b$

ולכן קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש $b>\frac{1}{n_0}$. מתקיים לכל $n\ge n_0$ $b>\frac{1}{n_0}\ge\frac{1}{n}>0$.

מכאן לכל $n\ge n_0$ $\frac{1}{n}\in(0,b)\subseteq[0,b)\subseteq[a,b)\subseteq U$.

הערה: מכלתחילה היה ברור שאם $\frac{1}{n}\xrightarrow{T}x$ אז $x=0$ שכן $\tau\subset T$ ועפ"י טענה שהוכחנו בכיתה במצב זה אם $\frac{1}{n}\xrightarrow{T}x$ אז גם $\frac{1}{n}\xrightarrow{\tau}x$ אבל אנו יודעים ש $\frac{1}{n}\xrightarrow{\tau}x$ אם ורק אם $x=0$ (מדוע?).

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

תהי $p\notin\mathbb{R}$ ויהי $X=\{p\}\cup\mathbb{R}$, תהי $\tau=\left\{O\subseteq X : p\notin O \vee \left|O^c\right|\le\aleph_0\right\}$.

א. יהי Y מ"ט כלשהו. תהי $f:(X,\tau)\to Y$ פונקציה, ותהי $\{x_n\}\subseteq X$ סדרה מתכנסת: $x_n\xrightarrow{\tau}x\in X$. הוכיחו ש- $f(x_n)\to f(x)$.

ב. מצאו דוגמה למרחב טופולוגי מטריזבילי Y, ופונקציה $g:(X,\tau)\to Y$ שאינה רציפה.

ג. הסיקו <u>משני הסעיפים הקודמים</u> שהמרחב (X,τ) אינו מטריזבילי.

<u>פתרון</u>

א. הראינו בתרגול שבמרחב טופולוגי זה, הסדרות המתכנסות הן הקבועות לבסוף. תהי $x_n\xrightarrow{\tau}x\in X$ אזי $x_n=x$ לבסוף ומכאן $f(x_n)=f(x)$ לבסוף. **בכל מ"ט** סדרות קבועות לבסוף הן מתכנסות לאותו איבר (יתכן שיש יותר מגבול אחד, אך זה לא רלוונטי לדיון).

ב. ניקח $Y=(X,\tau_{disc})$ (וכמובן שזהו מ"ט מטריזבילי), ו- $g=Id$ (פונקציה הזהות). אכן, זוהי פונקציה לא רציפה, שכן $\{p\}$ זו קבוצה פתוחה ב- Y אך $g^{-1}(\{p\})=\{p\}$ אינה פתוחה ב- (X,τ). אכן, $p\in\{p\}$ ו- $\left|\{p\}^C\right|>\aleph_0$.

ג. נניח בשלילה ש-$\left(X,\tau\right)$ מטריזבילי על ידי מטריקה d. נתבונן ב-Y מסעיף קודם עם הטופולוגיה המטריזבילית שמצאתם, ונסמנה ב-σ (אנחנו עבדנו עם הדיסקרטית, אך יתכן שיש לכם דוגמה אחרת; שימו לב שזה לא משפיע על ההמשך). נניח שהטופולוגיה שלכם מושרית ממטריקה ρ. התבוננו בפונקציה g שהגדרתם בסעיף הקודם. הראיתם ש-$g:\left(X,\tau\right)\to\left(Y,\sigma\right)$ אינה רציפה. לכן גם הפונקציה בין המרחבים *המטריים* $g:\left(X,d\right)\to\left(Y,\rho\right)$ אינה רציפה. מצד שני, g מקיימת (על פי סעיף א') אם $x_n\xrightarrow{d}x\in X$ אז-$g\left(x_n\right)\xrightarrow{\rho}g\left(x\right)$. זהו תנאי ששקול (במרחבים מטריים!) לרציפות. סתירה.

מש"ל

שאלה 6

א. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X הכוללת את כל תתי הקבוצות האינסופיות (אך לא בהכרח רק את אלה). הראו ש (X,τ) היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

ב. יהי X מצוייד בטופולוגיה הקו-סופית. נניח שקיימות במרחב לפחות 3 קבוצות סגוחות. הראו ש X סופית.

ג. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X עם התכונה הבאה: הקבוצה האינסופית היחידה שהיא פתוחה היא X עצמה. האם τ היא בהכרח הטופולוגיה הטריוויאלית? נמקו את תשובתכם.

פתרון

א. כדי להוכיח ש τ הטופולוגיה הדיסקרטית, מ"ל שלכל $x\in X$ הנקודון $\{x\}$ פתוח. X אינסופית- ידוע מבדידה שקיימות A,B זרות כך ש $A\cup B=X$ וגם A,B אינסופיות. בה"כ $x\in A$. מתקיים $A,B\cup\{x\}$ אינסופיות ולכן $A,B\cup\{x\}\in\tau$. τ טופולוגיה ולכן סגורה לחיתוך סופי ומכאן $\{x\}=A\cap\left(B\cup\{x\}\right)\in\tau$.

ב. בכל מ"ט $X,\varnothing$ סגוחות טריויאליות. לכן מהנתון קיימת במרחב סגוחה לא טריויאלית A. בפרט A,A^C סגורות השונות מ X. מהגדרת הטופולוגיה הקו-סופית נקבל ש A,A^C סופיות ומכאן $X=A\cup A^C$ סופית.

ג. לא. נראה דוגמא נגדית. נגדיר טופולוגיה על $\mathbb{R}$ באופן הבא: $\tau=\left\{\mathbb{R},\varnothing,\left\{19\right\}\right\}$.

מש"ל