①

סיכום - נכתב ע"י יותם בוקוביץ'

הרצאה 1

- **משפט פרמה:** תהי $f(x)$ מוגדרת ב-(a,b). יהי $x_0\in(a,b)$.
אם $f(x)$ גזירה ב-x_0 אז $f'(x_0)=0$ רק אם הערך $f(x_0)$ הכי גדול/קטן בקטע.

- **משפט רול:** תהי $f(x)$ מוגדרת ב-$[a,b]$ ורציפה.
נניח $f(x)$ גזירה בקטע (a,b) וכי $f(a)=f(b)$, אזי קיים $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=0$.

- **משפט הערך הממוצע של לגרנז':** תהי $f(x)$ מוגדרת ורציפה ב-$[a,b]$, וגזירה בקטע (a,b). אזי קיים $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- **משפט הערך הממוצע המוכלל של קושי:** תהיינה $f(x),g(x)$ מוגדרות ורציפות ב-$[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b). נניח $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$. אזי קיימת $a<c<b$ כך ש- $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

- **משפט לופיטל:** כאשר יש לנו $f(x),g(x)$ כך ש- $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}\Big|\frac{\infty}{0}\Big|\frac{0}{\infty}\Big|\frac{0}{0}$
(בצורה לא מדויקת) ניתן לגזור ל-$f'(x)$ ו-$g'(x)$ ונקבל: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

הרצאה 2

- **פיתוח טיילור:** תהי $f(x)$ פו' גזירה n פעמים בנק' (סביב) x_0 אזי:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)\quad,\quad R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad x_0<c<x$$

* פיתוח מקלורן הינו אותו פיתוח רק כאשר $x_0=0$.

- **חקירת פו':**

* **נק' קיצון:** תהא $f(x)$ גזירה פעמיים ברציפות בסביבה I של x_0 ונניח $f'(x_0)=0$.

- אם $f''(x_0)>0 \Leftarrow x_0$ נק' מינימום.
- אם $f''(x_0)<0 \Leftarrow x_0$ נק' מקסימום.
- אם $f''(x_0)=0 \Leftarrow$ הכל אפשר.
- נק' קיצון גלובליות: מקס' גלובלי $\Leftarrow \forall x\in D: f(x)\le f(x_0)$
מינ' גלובלי $\Leftarrow \forall x\in D: f(x)\ge f(x_0)$

המשך $\Longleftarrow$

* **קמירות ונק' פיתול:** תהא $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע I.

- אם $f''(x)>0$ עבור סביבה של x_0, אז הקמירות כלפי מעלה. $\cup$
- אם $f''(x)<0$ עבור סביבה של x_0, אז הקמירות כלפי מטה. $\cap$
- אם $f''(x_0)=0$ וכן סביבה מימין קמורה כלפי מעלה (מטה) וסביבה משמאל קמורה כלפי מטה (מעלה), אז x_0 היא נק' פיתול.

* **אסימפטוטות:** תהא $f(x)$ פו' מוגדרת.

- קו מהצורה $y=ax+b$ תקרא אסימפטוטה משופעת אם:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$$

- קו מהצורה $x=x_0$ תקרא אסימפטוטה אנכית אם:

$\lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$ או $\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty$ או $\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$

הרצאה 3

- **האינטגרל הלא מסוים:** * בהינתן $f(x)$ פו'. הפו' $F(x)$ תקרא קדומה של $f(x)$ בתחום I אם מתקיים: $\forall x\in I: F'(x)=f(x)$

(לפו' יש אינסוף פו' קדומות המופרדות בקבוע כלשהו $F(x)=G(x)+c$)

- קב' כל הפו' הקדומות של פו' $f(x)$ נקרא האינטגרל הלא מסוים של $f(x)$ ומסומן ע"י $\int f(x)dx$.

* **תכונות בסיסיות:**
- $\int \alpha f(x)dx=\alpha\cdot\int f(x)dx$ (α קבוע)
- $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

* **הגדרות חשובות:**
- פו' רציונלית: יחס שהמונה והמכנה הם פולינומים.
- פו' רציונלית האמיתית: פו' רציונלית בה מעלת הפולינום במונה קטנה מזו של הפולינום במכנה.
- שבר יסודי: פו' רציונלית בצורות: א. $\frac{A}{x-a}$, ב. $\frac{A}{(x-a)^k}$, $0<k\neq 1$, ג. $\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$, $b^2-4c<0$, $\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$, $k\neq1$, $b^2-4c<0$

הרצאה 4 - שיטות אינטגרציה

- **שיטת ההצבה:** - תהא $F(x)$ פונקציה קדומה של $F(x)$ בקטע I. ותהי $x=x(t)$ פונקציה גזירה לפי t. אזי: $\int f(x(t))\cdot x'(t)\,dt = F(x(t))+C$
  - (באינטגרל המסוים, ניתן להציב $t=g(u)$, ב- $\int_a^b f(u)\,du$ אז מקבלים $\int_{g(a)}^{g(b)} f(g^{-1}(t))[g^{-1}(t)]'\,dt$ על ידי הצבה $u=g^{-1}(t)$ ← כמובן שיש לבדוק הפיך).
- **אינטגרציה בחלקים:** $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

$$\Rightarrow \int f g'\,dx = f\cdot g - \int f'\cdot g\,dx$$

- **אינטגרציה של שברים יסודיים:**
  1. $\int \frac{dx}{x+\alpha} = \ln|x+\alpha| + C$
  2. $\int \frac{dx}{(x+\alpha)^k} = \frac{1}{(1-k)(x+\alpha)^{k-1}} + C$
  3. $\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b}\,dx = \ln|x^2+ax+b| + C$
  4. $\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^k}\,dx = \frac{1}{(1-k)(x^2+ax+b)^{k-1}} + C$
  5. $\int \frac{dx}{x^2+m^2} = \frac{1}{m}\cdot \arctan\left(\frac{x}{m}\right) + C$
  6. $\int \frac{dx}{x^2+ax+b} = \int \frac{dx}{(x+\frac{a}{2})^2+(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}})^2} = \frac{1}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\cdot\arctan\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\right) + C$
- **פירוק פולינומים:** (פונ')

$$\int \frac{r(x)}{(x-a)^3(x^2+b)^2\cdot x} = \int\left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+b} + \frac{Fx+G}{(x^2+b)^2} + \frac{H}{x}\right)$$

- **חלוק פולינומים:** כאשר מעלת הפולינום במונה גדול יותר ממעלת פולינום המכנה. עושים חילוק ארוך $\frac{P(x)}{Q(x)\,|\,R(x)}$ $\quad P(x)=\frac{Q(x)}{R(x)}$
- **שיטות ההצבות:** ✱ עבור $f(x)=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{k}{m}}$ נציב: $t^m=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$
  - ✱ **הצבות אוילר:** עבור פונ' $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$
    - אם ax^2+bx+c $[(k_1x-\alpha)(k_2x-\beta)]$ **פריק:** נציב: $t(k_1x-\alpha)=\sqrt{ax^2+bx+c}$
    - אם ax^2+bx+c **איננו פריק:** נציב: $\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}\pm t$ או: $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$
  - ✱ **הצבות טריגונומטריות:** $f(x)=\sin^m x\cos^n x$
    - אם m אי זוגי: נציב $t=\cos x \Rightarrow -dt=\sin x\,dx$ (אם שניהם אי זוגיים אז נשתמש 1 מהם)
    - אם n אי זוגי: נציב $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x\,dx$
  - ✱ **הצבה אוניברסלית:** נציב: $t=\tan\frac{x}{2}$ ואז:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

הרצאה 5

• **האינטגרל המסוים של רימן:**

* **הגדרות:** - בהינתן קטע סגור $[a,b]$ ניתן לחלקו ל-n קטעים. נסמן ב-T את החלוקה: $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ ונסמן ב- $1\le i\le n$ $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ את אורכי תתי הקטעים.

- בהינתן קטע סגור $[a,b]$ וחלוקה T, פרמטר החלוקה $= \lambda(T)=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$.
- תהא f פו' בקטע $[a,b]$ ותהא T חלוקה של הקטע.

בכל תת-קטע נבחר נק' $\alpha_i\in[x_{i-1},x_i]$ כלשהי, ונבנה את הסכום:

סכום רימן: $\sigma_T(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i$

- נאמר כי סכומי רימן $\sigma_T(\bar\alpha)$ שואפים לגבול I כאשר $\lambda(T)\to 0$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה T המקיימת $\lambda(T)<\delta$ ולכל בחירה של נק' $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ בחלוקה זו, מתקיים $|\sigma_T(\bar\alpha)-I|<\varepsilon$ כאשר:

האינטגרל המסוים לפי רימן: $I=\int_a^b f(x)dx$

* **הערות:** - תנאי הכרחי לכך ש-f תהיה אינט' (לפי רימן) בקטע $[a,b]$ הוא ש-f חסומה בקטע זה. (תנאי זה הכרחי אך לא מספיק)

• **האינטגרל ע"י דרבו:** תהא f פו' חסומה ב-$[a,b]$ ו-T חלוקה של הקטע.

נסמן $M_i=\sup_{[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$, $m_i=\inf_{[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$.

נכל לסמן:

הסכום העליון/תחתון של דרבו: $\underline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$, $\overline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ $(\forall i: 1\le i\le n)$

* **למה 1:** עבור פו' f חסומה ב-$[a,b]$ עם חלוקה T, ותהא $\{\sigma_T(\bar\alpha)\}$ קב' כל סכומי הרימן המתאימים לחלוקה זו: הקב' חסומה ומתקיים:

$\underline{S}(T)=\inf\{\sigma_T(\bar\alpha)\}$, $\overline{S}(T)=\sup\{\sigma_T(\bar\alpha)\}$

* **למה 2:** -(הגדרה: החלוקה T' היא עידון של החלוקה T אם היא מתקבלת מהחלוקה T ע"י הוספת נק' שאינן בה לה).

- אם T' היא עידון של T אזי: $\underline{S}(T)\le\underline{S}(T')$, $\overline{S}(T)\ge\overline{S}(T')$

* **למה 3:** אם T' מתקבלת מ-T ע"י הוספת p נק' אזי:

$\underline{S}(T)\ge\underline{S}(T')-p\cdot\lambda\cdot\Omega$ $\overline{S}(T)\le\overline{S}(T')+p\cdot\lambda\cdot\Omega$

כאשר $\lambda=\lambda(T)$ הוא פרמטר החלוקה של T ו- $\Omega=\sup_{[a,b]}\{f(x)\}-\inf_{[a,b]}\{f(x)\}$

* למה 4: לכל 2 חלוקות 'T ו-"T מתקיים: $\underline{S}(T')\le\overline{S}(T'')$

● משפט דרבו: - תהא f פו' חסומה בקטע הסגור $[a,b]$ אזי:

$$\overline{I}=\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(T)\ ,\quad \underline{I}=\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}(T)$$

כאשר: $\overline{I}=\inf_T\{\overline{S}(T)\}$, $\underline{I}=\sup\{\underline{S}(T)\}$

(אינט' עליון של דרבו) (אינט' תחתון של דרבו)

- במילים אחרות: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה

הרצאה 6: T עם פרמטר חלוקה $\lambda(T)<\delta$ יתקיים $\underline{I}-\underline{S}(T)<\varepsilon$ וכך גם $\overline{I}-\overline{S}(T)<\varepsilon$

● משפטים נוספים:

* תהא f פו' חסומה בקטע $[a,b]$ אזי f אינט' בקטע אמ"מ $\overline{I}=\underline{I}$.
אז הם שווים $I=\int_a^b f(x)dx$.

* משפט התנאי ההכרחי ומספיק לאינט': תהא פו' f מוגדרת ב-$[a,b]$.
f אינט' אמ"מ: 1) f חסומה בקטע.
2) לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה T של $[a,b]$ עבורה $|\overline{S}(T)-\underline{S}(T)|<\varepsilon$.

* התנאי "2" שקול ל- $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i=0$ כאשר $w_i=M_i-m_i$ בקטע $[x_{i-1},x_i]$

* אם f רציפה בקטע $[a,b]$ אז היא אינט' בו.

* - סדרת חלוקות $\{T_n\}$ של קטע סגור תקרא נורמלית אם $\lim_{n\to\infty}\lambda(T_n)=0$

- פו' מוגדרת וחסומה ב-$[a,b]$ תקרא רציפה למקוטעין אם יש לה לכל היותר מס' סופי של נק' אי רציפות מסוג ראשון.

* אם f רציפה למקוטעין ב-$[a,b]$ אז היא אינט' בו.

* אם f פו' מונוטונית עולה ב-$[a,b]$ אז היא אינט' בו.

הרצאה 7: ● תכונות יסודיות של פו' אינט' ושל אינטגרל מסוים:

* אם f אינט' ב-$[a,b]$ ו-c מס' ממשי, אזי $c\cdot f$ אינט' ומתקיים:
$\int_a^b c\cdot f(x)dx=c\cdot\int_a^b f(x)dx$

* אם f,g פו' אינט' ב-$[a,b]$ אז גם $f\pm g$ וגם $f\cdot g$ אינט' ומתקיים:
$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

* אם g,f אינט' ב-$[a,b]$ וקיים קבוע $C>0$ כך ש- $|g(x)|\ge C$ $\forall x\in[a,b]$:
אז גם $\frac{f}{g}$ אינט' בקטע. (כך גם עבור $f(x)=1$).

* אם f אינט' ב-$[a,b]$ אז היא אינט' בכל תת קטע: $[\alpha,\beta]$.

* אם f אינט' ב-$[a,b]$ וב-$[b,c]$ אז מתקיים: $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$

* אם f אינט' בקטע $[a,b]$ ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\geq 0$ $[f(x)\leq 0]$ אז גם $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ $[\int_a^b f(x)dx\leq 0]$.

* אם f,g אינט' ב-$[a,b]$ ומתקיים $\forall x\in[a,b]: f(x)\geq g(x)$ אזי:
$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ (ההפך לא נכון)

* <u>אי"ש האינטגרל</u>: אם f אינט' ב-$[a,b]$ אז גם $|f|$ אינט' ומתקיים:
$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (ההפך לא נכון)

* <u>הממוצע האינטגרלי של f</u>: תהא f פו' רציפה ב-$[a,b]$, אז קיים $a<c<b$ כך שמתקיים: $f(c)=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$

* <u>משפט ערך הביניים המוכלל</u>: תהא פו' f רציפה ב-$[a,b]$ ו-g פו' אינט' אשר אי שלילית בו. אז קיים $a<c<b$ כך ש: $\int_a^b f(x)g(x)dx\leq f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx$

● <u>הקשר בין האינטגרל המסוים ללא מסוים:</u>

- אם פו' f אינט' ב-$[a,b]$ אז היא בפרט אינט' בכל תת קטע $[a,x]$ $d<x$, לכן הביטוי $\int_a^x f(x)dx$ מוגדר היטב באופן חד ערכי - כלומר היא פו' של x ב-$[a,b]$

* אם f אינט' ב-$[a,b]$ אז $\int_a^x f(t)dt$ עבור $a\leq x\leq b$ היא פו' רציפה ב-$[a,b]$

* תהא f אינט' ב-$[a,b]$. אז לכל נק' x בה f רציפה, הפו' $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ <u>גזירה</u>, ומתקיים: $F'(x)=f(x)$.

● <u>המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי</u>: לכל פו' רציפה קיימת פו' קדומה:
אם f רציפה ב-$[a,b]$ אז $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ היא פו' קדומה (אחת) שלה.
כלומר $F'(x)=f(x)$

● <u>משפט ניוטון-לייבניץ</u>: תהא f פו' רציפה ב-$[a,b]$ ותהא $\Phi(x)$ פו' קדומה שלה, אז: $\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)$

הרצאה 8 - אינטגרלים לא אמיתיים מסוג ראשון.

• <u>אינט' לא אמיתי מסוג ראשון</u>: תהא $f(x)$ אינט' ב-$[a,b]$. נסמן: $\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)$

אם הגבול קיים במובן הצר אז נאמר שהאינטגרל <u>מתכנס</u>.

אם אחד משני גבולות האינטגרציה אינו סופי, נאמר כי האינט' הוא <u>אינ' אמיתי מסוג ראשון</u>.

• <u>תכונות שימושיות</u>:

- $$\int_a^\infty (f(x)\pm g(x))\,dx=\int_a^\infty f(x)dx\pm\int_a^\infty g(x)dx$$
- $$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int_{-\infty}^c f(x)dx+\int_c^\infty f(x)dx$$
- <u>הערה</u>: לא חייב להתקיים $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ כדי ש-$\int_a^\infty f(x)$ יתכנס.

• <u>משפטי התכנסות</u>:

* <u>מבחן ההשוואה הראשון</u>: תהיינה f,g פו' אינט' ב-$[a,b]$. נניח $\forall x\in[a,\infty): 0\le f(x)\le g(x)$

אז: $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס

מתבדר $\Rightarrow$ מתבדר

* <u>מבחן ההשוואה השני</u>: תהיינה פו' אינט' $\forall x\in[a,\infty): 0\le f,g$ וקיים הגבול: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

$I_f=\int_a^\infty f(x)dx,\quad I_g=\int_a^\infty g(x)dx$

אז: ① $0<L<\infty$: I_f ו-I_g "חברים".

② $L=0$: I_g מתכנסת $\Leftarrow$ I_f מתכנסת

③ $L=\infty$: I_f מתכנסת $\Leftarrow$ I_g מתכנסת.

* (<u>הגדרה</u>: בהינתן אינטגרל לא אמיתי $\int_a^\infty f(x)dx$, נאמר כי הוא <u>מתכנס בהחלט</u> אם האינטגרל $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס. נאמר כי הוא <u>מתכנס בתנאי</u> אם הוא מתכנס אך ורק עבור $\int_a^\infty f(x)dx$.)

* <u>קריטריון קושי</u>: תהא $f(x)$ אינט' בכל $[a,b]$, אזי האינטגרל מתכנס אמ"מ:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists B>a \mid \forall b_1,b_2>B: \left|\int_{b_1}^{b_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$$

* <u>משפט קושי</u>: התכנסות בהחלט גוררת התכנסות.

* <u>משפט דיריכלה</u>: תהיינה f,g פו' רציפות ב-$[a,\infty)$ ונניח:

① $f(x)$ מונוטונית ושואפת לאפס $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

② $f'(x)$ רציפה בכל $[a,\infty)$.

③ הפו' $G(x)=\int_a^x g(t)dt$ חסומה בקטע $[a,\infty)$.

<u>אזי</u>: $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס.

הרצאה 9 - אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

- **אינט' לא אמיתי מסוג שני:** תהא f פו' מוגדרת ולא חסומה בסביבה שמאלית של הנק' b ונניח שלכל $\varepsilon>0$ $f(x)$ אינט' בקטע $[a,b-\varepsilon]$. כלומר: לכל $\varepsilon>0$ האינטגרל $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ מוגדר היטב ולכן נוכל להגדיר: $I(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.
הגבול $I=\lim_{\varepsilon\to 0^+} I(\varepsilon)$ נקרא אינטגרל לא אמיתי מסוג שני. ומסמנים: $I=\int_a^b f(x)dx$
וכן אם הוא קיים במובן הנ"ל, נאמר שהוא מתכנס, אחרת נאמר כי מתבדר.
(ניתן גם להגדיר $J(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ עבור פו' לא חסומה בסביבה ימנית של a אותם התנאים ותק"ימו רק ש- $J=\lim_{\varepsilon\to 0^+}J(\varepsilon)$).
- **קריטריון קושי:** תהי a נק' יחידה ב- $[a,b]$ כך שבסביבתה $f(x)$ אינה חסומה. אזי האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס אמ"מ: לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $\delta_1,\delta_2<\delta$ מתקיים: $\left|\int_{a+\delta_1}^{a+\delta_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$
- **מבחני ההתכנסות:** בדיוק כמו במבחני ההתכנסות לאינטגרלים לא אמית"ים מסוג ראשון רק שהפעם הקטעים עליהם מדובר הם $[a+\varepsilon,b]$ או $[a,b-\varepsilon]$ (תלוי באינטגרל אליו מתייחסים).
- **מבחן האינטגרל:** יהא $\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ טור חיובי. a_k הוא ערך הפו' f בנק' $x=k$. אם f רציפה, חיובית ויורדת בתחום $x\geq 1$, אזי הטור הנ"ל והאינטגרל $\int_1^{\infty} f(x)dx$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

הרצאה 10 - בה"ח והתכנסות נק'\במ"ש

- **פו' בעלות השתנות חסומה (בה"ח):** תהא $f(x)$ פו' המוגדרת בקטע $[a,b]$. נתבונן בחלוקה T של הקטע: $T: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ ונגדיר את הסכום: $V(T)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$. אם קב' המספרים $V(T)$, עבור כל החלוקות האפשריות היא חסומה מלעיל, אז נאמר כי f היא בה"ח בקטע $[a,b]$.
אם F היא בה"ח אז המס' המוגדר ע"י $\bigvee_a^b f=\sup_T\{V(T)\}$ נקרא ההשתנות הכללית של F בקטע $[a,b]$. אחרת נכתוב $\bigvee_a^b f=\infty$.
- * פו' בה"ח בקטע סגור חסומה בו.
* פו' מונוטונית בקטע סגור היא בה"ח בו.
* תהינה f,g פו' בה"ח ב- $[a,b]$ ו- c מס' קבוע. אזי:
$\bigvee_a^b (f\pm g)=\bigvee_a^b f\pm\bigvee_a^b g$, $|k|\cdot\bigvee_a^b f=\bigvee_a^b c\cdot f$

- * אם 'T היא עידון של חלוקה T אז: $V_f(T')\geq V_f(T)$
- * אם f היא בה"מ ב-$[a,b]$ אז היא בה"מ בכל תת קטע $[\alpha,\beta]$. ובנוסף לכל נק' $a<c<b$ מתקיים: $\bigvee_a^b f(x)=\bigvee_a^c f(x)+\bigvee_c^b f(x)$
- * כל פו' בה"מ ניתנת להצגה כהפרש של שתי פו' לא יורדות בקטע.
- <u>משפט ז'ורדן</u>: פו' המוגדרות בקטע סגור היא בה"מ אמ"מ היא ניתנת להצגה כהפרש של שתי פו' לא יורדות.
- כל פו' בה"מ בקטע סגור היא אינט' בו. (ההפך לא נכון).
- * (<u>הגדרה</u>: קב' נק' E על הישר נ"א <u>בעלת מידה אפס</u> אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת סדרת קטעים המכסים את E וסכום אורכם קטן מ-ε.)
- <u>משפט לבג</u>: תנאי מספיק והכרחי לכך שפו' חסומה תהיה אינט' ב-$[a,b]$ הוא שקב' נק' אי הרציפות שלה, תהיה במידת אפס.
- * לפו' בעלת נגזרת חסומה בקטע סגור, היא בה"מ בו.

<u>סדרות של פו'</u>:

- <u>התכנסות נקודתית</u>: סדרה של פו' $\{f_k(x)\}$ היא התאמה, בה לכל k טבעי מתאימה פו' $f_k(x)$. סדרה זו מוגדרת בתחום D אם כל $f_k(x)$ מוגדרת ב-D.
אם נציב $x_0\in D$ כלשהו בסדרת הפו' תתקבל סדרת מספרים: $\{f_k(x_0)\}$.
אם $\{f_k(x_0)\}$ מתכנסת במובן הרגיל, אז נאמר שסדרת הפו' $\{f_k(x)\}$ <u>מתכנסת נק'</u> ב-x_0. קב' הנק' בהן $\{f_k(x)\}$ מתכנסת נק', נקראת <u>תחום ההתכנסות</u> של הסדרה והוא מוכל או שווה ל-D. נוכל לומר: $f(x)=\lim_{k\to\infty}f_k(x)$ <u>פו' הגבול</u>

- <u>התכנסות במ"ש</u>: תהא $\{f_k(x)\}$ סדרת פו' המוגדרת בתחום D.
$\{f_k(x)\}$ מתכנסת במ"ש בקטע I אמ"מ $\forall\varepsilon>0\ \exists k_0\in\mathbb{N}\mid\forall k>k_0,\forall x\in I:|f(x)-f_k(x)|<\varepsilon$

10

הרצאה 10

● **משפטי התכנסות:**

* תהא $f_k(x)$ סדרת פונ' רציפות המתכנסת נקודתית בקטע I.
אם $f_k(x)$ מתכנסת במ"ש ב-I ל-$f(x)$ אז בהכרח $f(x)$ רציפה ב-I.

● **קריטריון קושי להתכנסות במ"ש:** תהא $f_k(x)$ סדרת פונ' מוגדרת בקטע I.
אז הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע I אמ"מ:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists k_0\in\mathbb{N} \mid \forall m,n>k_0,\ \forall x\in I: |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

● **מבחן ה-lim(sup):** סדרת הפונ' $f_k(x)$ מתכנסת במ"ש בקטע I לפונ' הגבול $f(x)$ אמ"מ: $\lim_{k\to\infty}\left[\sup_{x\in I}|f(x)-f_k(x)|\right]=0$

● **טור פונ':** תהא $f_k(x)$ סדרת פונ' המוגדרת בקטע I, הסכום $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ נקרא **טור פונ'**.

* אם הוא מתכנס, אז נאמר שטור הפונ' $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ מתכנס נק' ב-x_0.
* קב' כל הנק' בהן טור הפונ' מתכנס נק' נקרא **תחום ההתכנסות**.
* נסמן: $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$, $S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$ פונ' הסכום
* הטור $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע I אם הסס"ח שלו מתכנסת במ"ש בקטע I.
* $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ מתכנס נק' ב-I $\iff$ $r_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$ לכל x ב-I.
* הטור $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ מתכנס במ"ש ב-I $\iff$ $r_n(x)\xrightarrow[\text{במ"ש}]{n\to\infty}0$

● **מבחן ה-M של ויירשטראס:** יהא $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ טור פונ' המוגדר בקטע I.
אם קיים טור מס' חיובי $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס כך ש:

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in I: |f_k(x)|\le a_k$$

אז $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ מתכנס במ"ש ב-I.

● **הערות:** * סכום סופי של פונ' רציפות הוא תמיד פונ' רציפה $\Leftarrow$ הטור $S_n(x)$ רציפות כאשר הפונ' רציפות

* אם בנוסף הטור מתכנס במ"ש ב-I, שזה אומר ש-$S_n(x)$ מתכנסת במ"ש ב-I לכן $S(x)$ גם רציפה ב-I.

● **התכנסות במ"ש של טורי פונ':**

● **קריטריון קושי להתכנסות טורים:** יהא $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ טור פונ' המוגדר בקטע I
הטור מתכנס במ"ש בקטע I אמ"מ:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists k_0\in\mathbb{N} \mid \forall n>k_0,\ m\in\mathbb{N},\ x\in I: \left|\sum_{k=n+1}^{n+m}f_k(x)\right|<\varepsilon$$

- **משפט דיני**: יהא $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ טור של פו' רציפות ואי שליליות [או אי חיוביות] בקטע הסגור $[a,b]$. אם פו' הסכום $S(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ אז ההתכנסות היא במ"ש שם.
- **משפט דיריכלה**: יהא $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ טור פו' חסום במשותף בתחום I - כלומר הסכום שלו חסום במשותף: $\exists M \mid \forall n\in N, x\in I: |B_n(x)|<M$.
ותהא $a_k(x)$ סדרה מונוטונית מתכנסת במ"ש לאפס בקטע I.
אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ מתכנס במ"ש ב-I.
- **משפט אבל**: אם הטור $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)$ מתכנס במ"ש בקטע I והסדרה $a_k(x)$ מונוטונית וחסומה במשותף, אז גם $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ מתכנס במ"ש ב-I.

- **אינטגרציה איבר-איבר**: * תהא $f_k(x)$ סדרת פו' רציפות בקטע $[a,b]$ המתכנסת במ"ש לפו' $f(x)$ אזי $f(x)$ אינט' שם ומתקיים: $\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)dx=\int_a^b f(x)$

- * תהא $f_k(x)$ סדרת פו' רציפות ב-$[a,b]$, נתון כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס במ"ש ל-$S(x)$ ב-$[a,b]$ אז: $\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)dx$

- **גזירה איבר-איבר**: * תהא $f_k(x)$ סדרת פו' גזירות ברציפות ב-$[a,b]$.
אם הטור $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס נק' בקטע $[a,b]$ וטור הנגזרות מתכנס במ"ש ב-$[a,b]$
אזי: $S'(x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)'=\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$

- **דוגמאות**: * דוגמא לפו' רציפות שמתכנסת נק' אך פו' הגבול אינה אינט':
$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x & 0\le x\le \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$$
בתחום $[0,1]$

* דוגמא לפו' $f_n(x)$ רציפות ומתכנסות נק' ל-f רציפה אך:
$$f_n(x)=\begin{cases} 2n^2x, & 0\le x\le \frac{1}{2n} \\ 2n(1-nx), & \frac{1}{2n}\le x\le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases} \quad [0,1] \quad : \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx \ne \int_a^b f(x)dx$$

* דוגמא לפו' $f_n(x)$ רציפות ומתכנסת נק', אך סדרת האינטגרלים של סדרת הפו' אינה מתכנסת:
$$g_n(x)=\begin{cases} f_n(x) & n \text{ זוגי} \\ -f_n(x) & n \text{ אי זוגי}\end{cases}$$

הרצאה 13 - טור חזקות

- טור חזקות סביב האפס הוא טור פו' מהצורה $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.
באופן כללי טור חזקות סביב נק' x_0 כלשהי מהצורה $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$
a_k = המקדם של ה-x-ים.
- <u>משפט אבל</u>: אם טור חזקות $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מתכנס בנק' $\alpha \neq 0$, אז הוא מתכנס בהחלט עבור $|x|<|\alpha|$
- <u>רדיוס ההתכנסות של טור חזקות</u>: לכל טור חזקות, אם $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ תחום ההתכנסות חסום, אז קיים מס' אי שלילי R כך שלכל $|x|<R$ הטור <u>מתכנס בהחלט</u>, ולכל $R<|x|$ הטור <u>מתבדר</u>. (אם $R=\infty$, הטור מתכנס בכל $\mathbb{R}$).
- <u>משפט קושי - הדמר</u>: נסמן רדיוס ההתכנסות כ- R:
$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}$$
- <u>משפט דלאמבר</u>: אם קיים הגבול $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ אז הוא שווה ל- R.

- <u>התכנסות במידה שווה</u>: יהא $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות R, אזי לכל $0<r<R$ הטור מתכנס <u>במ"ש</u> בקטע $[-r,r]$

* אם טור חזקות מתבדר בנק' $x=R$ הוא אינו יכול להתכנס במ"ש ב- $(-R,R)$ וכן לא לגבי $x=-R$.

(*) אם טור הנגזרת מתכנס ב- $x=\pm R$ אז גם הטור המקורי מתכנס שם.

* אם הטור מתכנס (אפילו בתנאי) בנק' $x=R$ $[x=-R]$ אז הוא מתכנס <u>במ"ש</u> בקטע $[0,R]$ ($[-R,0]$)

(*) לטור הנגזרת יש את אותו ר"ה.

(*) לכל $|x|<R$ מתקיים: $\sum (a_k x^k)' = S'(x)$

* הטור חזקות מתכנס במ"ש בכל קטע סגור השייך לתחום ההתכנסות התק'.

* יהא $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות R.
סכום הטור (S) הוא פו' רציפה ב- $(-R,R)$.

- <u>פיתוח פו' אלמנטריות לטור חזקות</u>: לפי טיילור: $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

* <u>פיתוחים חשובים</u>:
- $\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$ $\quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$
- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $|x|<1$: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$

<u>חשוב</u>: $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$

- $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}$
- $\arctg(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$