studenteen.org

21.3.2012

טופולוגיה

תרגול 1

תהי $f:X\to Y$, $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$ תת-קבוצות כלשהן.

__הגדרה:__ התמונה של A מוגדרת:

$$f(A):=\{f(x)\mid x\in A\}$$

התמונה ההפוכה של B:

$$f^{-1}[B]=f^{-1}(B):=\{x\mid f(x)\in B\}$$

__טענה:__

1. אם $A\subseteq B\subseteq Y$ אזי $f^{-1}(A)\subseteq f^{-1}(B)\subseteq X$
2. אם $A\subseteq B\subseteq X$ אזי $f(A)\subseteq f(B)\subseteq Y$

__הוכחה:__

יהי $x\in f^{-1}(A) \Rightarrow f(x)\in A\subseteq B \Rightarrow f(x)\in B \Rightarrow x\in f^{-1}(B)$. □

__טענה:__ $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$

__הוכחה:__

($\supseteq$) $\forall i\in I$ מתקיים $\bigcup_{i\in I}B_i\supseteq B_i \Longrightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)\supseteq f^{-1}(B_i)$ לכל $i\in I$.

ולכן $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)\supseteq\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$. □

($\subseteq$) יהי $x\in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)$, אזי $f(x)\in\bigcup_{i\in I}B_i$, ולכן קיים $i_0\in I$ כך ש: $f(x)\in B_{i_0} \Longrightarrow x\in f^{-1}(B_{i_0}) \Longrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$. □

__טענה:__

1. $f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f(A_i)$ $\Longrightarrow$ נכון! לבדוק בבית.
2. $f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\bigcap_{i\in I}f(A_i)$.

נניח f פונקציה קבועה. $A_1\cap A_2=\emptyset$.

$f(A_1\cap A_2)=\emptyset$, אך $f(A_1)\cap f(A_2)=\{c\}$.

מרחבים מטריים

__הגדרה:__ תהי M קבוצה כלשהי ונניח שמוגדרת פונקציה $d:M\times M\to[0,\infty)$ המקיימת:

(א) $d(x,y)=0\iff x=y$.

(ב) $d(x,y)=d(y,x)$ לכל $x,y\in M$.

(ג) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ לכל $\forall x,y,z\in M$.

במקרה זה נאמר ש- (M,d) הוא מ"מ, ו- d נקראית "המטריקה על M".

מהאקסיומות נובע ש- $d(x,y)\geq 0$.

__הגדרה:__ (מרחב נורמי)

יהי X מ"ו מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. נגדיר את פונקציית הנורמה: $\|\cdot\|:X\to[0,\infty)$ המקיימת:

(א) $\|x\|=0\iff x=0$. (ב) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ עבור $\alpha\in\mathbb{R},\mathbb{C}$. (ג) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

תרגיל: הוכיחו במרחב הוקטורי

$$X=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sup\{|x_n|:n\in\mathbb{N}\}<\infty\}$$

הפונקציה $\|(x_n)\|=\sup\{|x_n|:n\in\mathbb{N}\}$ היא נורמה. [מרחב זה מסומן ב- ℓ_∞]

הוכחה:

1. $\|x\|=0 \iff x=0$.

$(\Longrightarrow)$ ברור!

$(\Longleftarrow)$ $\|x\|=\|(x_n)\|=0 \Rightarrow \sup|x_n|=0 \longrightarrow x_n=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow x=0$.

2. $\|\alpha(x_n)\|=\sup\{|\alpha x_n|\}=\sup\{|\alpha|(x_n)\}=|\alpha|\|(x_n)\|$

3. א"ש

$$\sup\{|x_n+y_n|:n\in\mathbb{N}\}$$

$$\forall m\in\mathbb{N}: |x_m+y_m|\le|x_m|+|y_m|\le$$
$$\le\sup\{|x_n|:n\in\mathbb{N}\}+\sup\{|y_n|:n\in\mathbb{N}\}=T$$

מכאן, בהכרח: $\sup\{|x_n+y_n|:n\in\mathbb{N}\}\le T \longrightarrow \|(x_n)+(y_n)\|\le\|(x_n)\|+\|(y_n)\|$. $\square$

הגדרה: יהי M מ"מ ותהי $\{x_n\}\subseteq M$ סדרה. נאמר ש- $x_n\xrightarrow{d}x$ ($\{x_n\}$ מתכנסת ל-x.)

אם $\forall\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$, $d(x_n,x)<\varepsilon$.

טענה שקולה:

$x_n\xrightarrow{d}x \iff d(x,x_n)\longrightarrow 0$.

תרגיל: תהי $\{e_n\}$ סדרה במרחב ℓ_∞. הוכיחו שהסדרה הנ"ל **אינה** מתכנסת במרחב **למרות** שהיא כן מתכנסת "רכיב רכיב".

e_n - זו סדרה שכל איבריה הם אפס, פרט ל-1 במקום ה-n:

רכיב 1 רכיב 2

$e_1=1,0,0,\dots$

$e_2=0,1,0,0\dots$

$e_3=0,0,0,1,\dots$

הוכחה: "רכיב רכיב": כל רכיב הוא סדרה קבועה לבסוף ("0") ולכן מתכנסת.

מדוע הסדרה $\{e_n\}$ אינה מתכנסת?

ראינו: סדרה מתכנסת $\Rightarrow$ סדרת Cauchy.

אך, הסדרה שלנו אינה קושי מהסיבה הבאה:

$$\forall m\neq n: \|e_m-e_n\|=1$$

הגדרה: המטריקה ה- a אדית - a-adic.

יהי $1\neq a\in\mathbb{N}$. נרצה להגדיר מטריקה על $\mathbb{Z}$:

$$\forall x,y\in\mathbb{Z}: d_a(x,y)=\begin{cases}0\\ \frac{1}{a^{k(x,y)}}\end{cases}$$

כאשר: $k(x,y)=\max\{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}: a^i\,|\,(x-y)\}$

תרגיל:

(א) חשבו $d_3(20,2)$

(ב) תארו את $B_{d_3}(0,\frac{2}{5})$, $B_{d_3}[0,\frac{2}{5}]$

(ג) יהי $0\neq x\in B_{d_3}(0,1)$. הראו ש- $B_{d_3}(0,1)=B_{d_3}(x,1)$.

(ד) הוכיחו $x_n=2\cdot 3^n+5\longrightarrow 5$.

פתרון:

(א)
$$d_3(20,2)=\frac{1}{3^{k(20,2)}}$$
$$k(20,2)=\max\{i: 3^i\,|\,18\}=2$$
$$d_3(20,2)=\frac{1}{9}$$

(ב) $B_{d_3}(0,\frac{2}{5})=B_{d_3}(0,1)$

נשים לב כי המרחקים הם $1=\frac{1}{3^0},\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\dots$. $\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<1$.

נתאר $B_{d_3}(0,1)$

$x\in B_{d_3}(0,1)$, $d_3(x,0)<1$, $\frac{1}{3^{k(x,0)}}<\frac{1}{3^0}$

$3\,|\,x \Longleftarrow i>0 \Longleftarrow \max\{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}: 3^i\,|\,x-0\}>0 \Longleftarrow k(x,0)>0 \Longleftarrow$.

$$B_{d_3}[0,\tfrac{2}{5}]=B_{d_3}(0,\tfrac{2}{5})=3\mathbb{Z}$$

(ג) יהי $0\neq x\in B_{d_3}(0,1)$.

נוכיח: רק הכלה אחת: $B_{d_3}(0,1)\subseteq B_{d_3}(x,1)$

יהי $y\in B_{d_3}(0,1)$ $\longleftarrow$ $3\,|\,y$, וגם $y\in B_{d_3}(x,1)$

$$d_3(y,x)<1$$
$$\frac{1}{3^{k(x,y)}}<\frac{1}{3^0}$$
$$k(x,y)>0$$

קיים $i>0$ כך ש: $3^i\,|\,(x-y)$

נתון: $y\in B_{d_3}(x,1) \longleftarrow 3\,|\,x-y \longleftarrow 3\,|\,x \longleftarrow 0\neq x\in B_{d_3}(0,1)$.

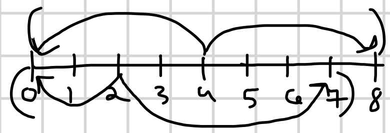
ניתן להראות: אם $y=0$ אז לא לשכוח שגם $0\in B_{d_3}(x,1)$ אבל: $d_3(0,x)<1$ אבל זה ברור לפי הנתון. $x\in B_{d_3}(0,1)$

(ד) $x_n\xrightarrow{d_3}x \iff d_3(x_n,x)\to 0$.

$$d_3(2\cdot 3^n+5,5)=\frac{1}{3^{k(2\cdot 3^n+5,5)}}=\frac{1}{3^n}\longrightarrow 0$$

תרגיל: האם ייתכן כי $B(a_1,r_1) \subset B(a_2,r_2)$ ו- $r_1 > r_2$?

פתרון: כן. נסתכל במרחב $\mathbb{R}^+$, המוגדר כתת-מרחב של $\mathbb{R}$. הכדור $B(4,4)$ יהיה הקטע הפתוח: $(0,8)$ והכדור $B(2,5)$ יהיה הקטע $(0,7)$.



תרגול 2

28.3.2012

תזכורת: יהי (X,d) מ"מ. $A \subseteq X$ נקראת קבוצה פתוחה אם לכל $x \in A$ קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $x \in B(x,\varepsilon) \subseteq A$.

טענה: יהי (X,d) מ"מ. יהי (A,d_A) תת מ"מ. $U \subseteq A$ פתוחה $\Longleftrightarrow$ קיימת $V \subseteq X$ פתוחה כך ש- $U = V \cap A$.

תרגיל: יהי (A,d_A) תת מ"מ של (X,d). תהי $V \subseteq X$ המקיימת כי $V \cap A$ פתוחה ב- (A,d_A).
האם V פתוחה ב- X ?

פתרון: לא!

$X = \mathbb{R}$
$A = (1,2)$, $V = (1,3]$
$V \cap A = A \to$ פתוח!

אבל $(1,3]$ אינה פתוחה ב- $\mathbb{R}$. (הנקודה המכשילה היא 3)

תרגיל: נתבונן ב- $\mathbb{R}$ ובתת-מרחב של $A = [0,2]$. האם $U = (1,2]$ פתוחה ב- A ?

פתרון $V \cap A = (1,2]$, ניקח $V = (1,3)$, $(1,3) \cap [0,2] = (1,2]$.

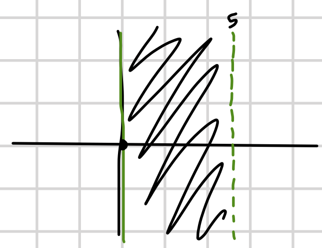
תרגיל: האם הקבוצות הבאות פתוחות ב- $\mathbb{R}^2$?

(א) $E = \{(x,y) : 0 \le x < 5\}$.

(ב) $D = \{(x,y) : xy < 1\}$

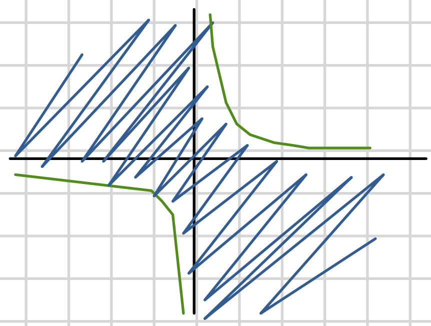
פתרון:

(א)



הקבוצה אינה פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$, מכיוון שלמשל עבור $(0,0)$, לא קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B((0,0),\varepsilon) \subseteq E$.

(ב)



הקבוצה כן תהיה פתוחה.

הגדרה: קבוצה $S \subseteq M$ נקראית "סגורה" אם $S^c \subseteq M$ פתוחה.

הגדרה שקולה: יהי (X,d) מ"מ. $A \subseteq X$ סגורה $\iff$ לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ כך ש-$x_n \to x$, מתקיים $x \in A$.

כלו', קבוצה היא סגורה אם היא מכילה את כל נק' הגבול שלה.

דוגמא: נתבונן בסדרה $A=\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ כתת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

הקבוצה הזאת אינה סגורה כי יש בה סדרה $\frac{1}{n} \to 0$, אבל $0 \notin A$.

אבל, למשל, A סגורה ב-$(0,\infty)$, כי במרחב זה $\{\frac{1}{n}\}$ לא מתכנסת.

הגדרה: יהיו (X,d) , (Y,ρ) מ"מ. נאמר שפונקציה $f: X \to Y$ רציפה בנק' $a \in X$ אם:

לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d(x,a)<\delta$, אזי $\rho(f(x),f(a))<\varepsilon$.

ובמונחי כדורים:

לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x \in X$, $x \in B_d(a,\delta)$, אזי $f(x) \in B_\rho(f(a),\varepsilon)$

תרגיל: יהיו $(\mathbb{R},d_{abs})$, $(\mathbb{R}^n,d_{max})$. תהי $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציית ההטלה על הרכיב הראשון:

$$f(x_1,\dots,x_n)=x_1$$

הוכח ש- f רציפה.

פתרון: תהי $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$. ונראה ש-$f$ רציפה ב-a.

טיוטה:
$$d_{max}(x,a)<\delta \longrightarrow d_{abs}(f(x),f(a))<\varepsilon$$

$$d_{max}(x,a)=max\{|x_1-a_1|,\dots,|x_n-a_n|\}<\delta=\varepsilon$$

$$d_{abs}(f(x),f(a))=d_{abs}(x_1,a_1)=|x_1-a_1|<\varepsilon$$

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\varepsilon$ ואכן מתקיים

$$d_{max}(x,a)<\delta \longrightarrow d_{abs}(f(x),f(a))<\varepsilon$$

משפט:

(1) יהיו X,Y מ"מ. $f:X\to Y$ רציפה $\iff$ לכל $U\subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X.

* (הטענה נכונה גם לסגורות)

(2) יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מ"מ. $f:X\to Y$. אזי התנאים הבאים שקולים:

① f רציפה.

② אם $x_n \xrightarrow{d} x$ אזי $f(x_n)\xrightarrow{\rho} f(x)$

תרגיל: יהיו $(X,d_1),(X,d_2)$ מ"מ. הוכיחו שמתקיים:

$Id:(X,d_1)\to(X,d_2)$ רציפה $\iff$ לכל U פתוחה ב- (X,d_2) , (X,d_1) פתוחה.

פתרון: $\boxed{\Longrightarrow}$ נניח U פתוחה ב- $(X,d_2) \Leftarrow$ U פתוחה ב- (X,d_1)

נוכיח כי Id רציפה. לכל $U\subseteq(X,d_2)$ פתוחה, נראה כי $Id^{-1}(U)$ פתוחה ב- (X,d_1).

אבל $Id^{-1}(U)=U$.

$\Longleftarrow$ תהי U פתוחה ב-(X,d_2). Id רציפה ולכן $Id^{-1}(U)$ פתוחה ב- (X,d_1). אבל $Id^{-1}(U)=U$ ולכן U פתוחה ב- (X,d_1).

הגדרה: שתי מטריקות הן שקולות אם הן מגדירות את אותו אוסף של קבוצות פתוחות.

מסקנה: (מהתרגיל הקודם) יהיו ρ, d שתי מטריקות על X. נאמר שהן שקולות $\iff$ שתי הפונקציות הבאות רציפות:

$$\begin{cases} I'_d : (X,\rho)\to(X,d) \\ I_d : (X,d)\to(X,\rho) \end{cases}$$

הגדרה נוספת: יהיו ρ, d שתי מטריקות על X. נאמר שהן שקולות אמ"מ:

$$\{x_n\}\xrightarrow{d} x \iff \{x_n\}\xrightarrow{\rho} x$$

הסבר לשקילות: נתון: $\{x_n\}\xrightarrow{d}x$ וחצים להראות $\{x_n\}\xrightarrow{\rho}x$ כאשר ידוע ש- d,ρ שקולות לפי רציפות I_d.

I_d מ-d ל-ρ רציפה ולכן: $\{x_n\}\xrightarrow{\rho}x \Leftarrow I_d(x_n)\xrightarrow{\rho} I_d(x) \Leftarrow \{x_n\}\xrightarrow{d}x$.

תרגיל: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה ממשית. נגדיר את הגרף של f

$$Gr_f := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=f(x)\}$$

הוכיחו כי Gr_f תת"ק סגורה של $\mathbb{R}^2$ לכל פונקציה רציפה f.

פתרון: נוכיח ש- Gr_f סגורה ע"י כך שנראה שהיא מכילה את כל נק' הגבול של הסדרות המתכנסות שלה.

תהי סדרה ב-Gr_f: $\{(x_n,y_n)\}$. נניח $(x_n,y_n)\to(x,y)$, ונראה $(x,y)\in Gr_f$.

P_1 - הטלה על הרכיב הראשון. ראינו שהיא רציפה, ולכן:

$$(x_n,y_n)\longrightarrow(x,y)$$
$$P_1(x_n,y_n)\longrightarrow P_1(x,y)$$
$$x_n\longrightarrow x$$

ובאותו אופן, גם P_2 רציפה ולכן: $\boxed{y_n\to y}$

נתון כי f רציפה ולכן:
$$f(x_n)\longrightarrow f(x)$$
$$f(y_n)\longrightarrow f(y)$$

הוכחנו בכיתה את יחידות הגבול ולכן $y=f(x)$, ולכן $(x,y)\in Gr_f \Rightarrow Gr_f$ סגורה.

תרגיל: הוכיחו שבמ"מ כדור סגור הוא קבוצה סגורה.

פתרון: יהי $B[a,r]\subseteq M$, ונוכיח ש- $B[a,r]^c$ פתוחה.

כלומר, לכל $x\in B[a,r]^c$, קיים $\varepsilon>0$ כך ש: $y\in B(x,\varepsilon)\subseteq B[a,r]^c$

נוכיח כי: $d(x,y)<\varepsilon \Rightarrow d(y,a)>r$.

ניקח $\varepsilon=d(x,a)-r$.

$$d(x,y)<\varepsilon= d(x,a)-r$$
$$d(x,y)<d(x,a)-r$$
$$r<\underset{\substack{\rotatebox{90}{$\leq$}\\ d(x,y)+d(y,a)}}{d(x,a)}-d(x,y)$$

סה"כ, $r<\cancel{d(x,y)}+d(y,a)-\cancel{d(x,y)} \Rightarrow r<d(y,a)$.

18.4.12

תרגול 3

תרגיל: תהי $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | xy<1\}$. הוכיחו ש-$D$ פתוחה ב-$\mathbb{R}^2$.

פתרון: תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x\cdot y$. (כמכפלה של הטלות רציפות)

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: f(x,y)<1\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: f(x,y)\in(-\infty,1)\}$$
$$=f^{-1}(-\infty,1)$$

$(-\infty,1)$ פתוחה ו-f רציפה ולכן D פתוחה. מש"ל

תרגיל: הוכיחו שפונקציית הערך השלם אינה רציפה. $f=[\cdot]:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

פתרון:
$$f^{-1}(4)=\{x\in\mathbb{R}: [x]=4\}$$
$$=[4,5)$$

$\{4\}$ סגורה ב-$\mathbb{R}$ אבל התמונה ההפוכה שלה $[4,5)$ אינה סגורה ב-$\mathbb{R}$ ולכן f אינה רציפה. מש"ל

תרגיל: יהי (X,d) מ"מ ותהי $a\in X$.

(א) הוכיחו כי הפונקציה $f_a:X\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_a(x)=d(x,a)$ רציפה.

(ב) הסיקו שלכל $r>0$ הכדור $B[a,r]$ הוא קבוצה סגורה.

פתרון: (א) נוכיח: לפי ההגדרה. נוכיח ש-f_a רציפה בכל נקודה.

יהי $x\in X$. צ"ל: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d(x,y)<\delta$, $(y\in X)$ אזי: $|f_a(x)-f_a(y)|<\varepsilon$.

$$|f_a(x)-f_a(y)|=|d(x,a)-d(a,y)| \underset{\text{אמ"ש}}{\le} d(x,y) \underset{\text{הרצוי}}{<} \varepsilon$$

נבחר בהתאם $\delta=\varepsilon$.

(ב) ננסה להראות ש-$B[a,r]$ מתקבל כתמונה הפוכה תחת f_a של קבוצה סגורה כלשהי ב-$\mathbb{R}$.

$$B[a,r]=\{x\in X: d(x,a)\le r\}=\{x\in X: f_a(x)\le r\}=\{x\in X: f_a(x)\in[0,r]\}=f^{-1}([0,r])$$ מש"ל

תרגיל: יהי M מ"מ. $A\subseteq M$ קבוצה סגורה. הוכיחו שאם $x\notin A$ אז קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$B(x,\frac{1}{n})\cap A=\emptyset$

פתרון: A סגורה $\Leftarrow$ A^c פתוחה. $x\in A^c$ ולכן קיים $\varepsilon>0$ כך ש-$B(x,\varepsilon)\subseteq A^c$, כלומר, $B(x,\varepsilon)\cap A=\emptyset$.
לכל $\varepsilon>0$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$\frac{1}{n}<\varepsilon$. מש"ל

תרגיל: הוכיחו שבמ"מ כל קבוצה סגורה ניתנת להצגה כחיתוך מנ' (בן מניה) של קבוצות פתוחות.

פתרון: יהי M מ"מ, A קבוצה סגורה. לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר:

$$O_n=\bigcup_{a\in A}B(a,\tfrac{1}{n})$$

O_n פתוחה כאיחוד של קבוצות פתוחות.

טענה: $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n$

הוכחה: 1) $A\subseteq\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n$. יהי $x\in A$, אז, לכל $n\in\mathbb{N}$: $x\in B(x,\frac{1}{n})\subseteq O_n$ $\Leftarrow$ $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n$ $\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n$.

(2) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n\subseteq A$. יהי $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n$, ונניח בשלילה $x\notin A$. אז לפי התרגיל הקודם קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש- $B(x,\frac{1}{n_0})\cap A=\emptyset$.

$x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n$ $\leftarrow$ $x\in O_{n_0}$ $\leftarrow$ $x\in\bigcup_{a\in A}B(a,\frac{1}{n_0})$ $\leftarrow$ קיים $a\in A$: $x\in B(a,\frac{1}{n_0})$ $\leftarrow$ $a\in B(x,\frac{1}{n_0})$.

ולכן נקבל ש- $a\in B(x,\frac{1}{n_0})\cap A$ סתירה לכך שהחיתוך ריק! מש"ל

נקודת הצטברות:

הגדרות: יהי (M,d) מ"מ.

1) תהי $A\subseteq M$ תת'. נאמר ש- $x\in M$ היא נק' הצטברות של A אם לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $(B(x,\varepsilon)\setminus\{x\})\cap A\neq\emptyset$

[כלומר: לכל $\varepsilon>0$ קיימת $x\neq a\in A$ כך ש- $0<d(x,a)<\varepsilon$]

2) (משפט) x הוא נק' הצטברות של A. $\Longleftrightarrow$ קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq A\setminus\{x\}$ כך ש- $x_n\to x$.

3) במשפט הקודם ניתן לדרוש שכל איברי הסדרה $\{x_n\}$ שונים.

הערה:

1) נק' הצטברות של A לא חייבת להיות ב- A.

2) נק' גבול אינה בהכרח נק' הצטברות. $\{x\}\to x$

3) כל נק' הצטברות היא נק' גבול.

סימון: נסמן את אוסף כל נק' ההצטברות של A ב- A'.

תרגיל: יהי (M,d) מ"מ. הוכיחו: A סגורה $\Longleftrightarrow$ $A'\subseteq A$.

פתרון: $\boxed{\Rightarrow}$ ידוע $A'\subseteq A$, נוכ' A סגורה.

כלומר: אם $\{x_n\}\subseteq A$ וגם $x_n\to x\in M$, נוכ' $x\in A$. נניח בשלילה ש- $x\notin A$. לכן יש לנו $\{x_n\}\subseteq A=A\setminus\{x\}$ כך ש- $x_n\to x$.
$\Longleftarrow$ x נק' הצט' של A, כלומר $x\in A'$, ולכן $x\in A$. בסתירה. $\Longleftarrow$ A סגורה.

$\boxed{\Leftarrow}$ נתון ש- A סגורה, נוכ' $A'\subseteq A$.

תהי $x\in A'$. x נק' הצטברות של A ולכן קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq A\setminus\{x\}$ כך ש- $x_n\to x$. ולכן מכיוון ש- A סגורה, נקבל כי $x\in A$.
מש"ל

תרגיל: יהי (M,d) מ"מ. $A\subseteq M$. הוכיחו: $A''\subseteq A'$.

פתרון: תהי $a\in A''$, נוכ' $a\in A'$.

לכל $\varepsilon>0$, $(B(a,\varepsilon)\setminus\{a\})\cap A=\emptyset$.

לכל $\varepsilon>0$, $(B(a,\varepsilon)\setminus\{a\})\cap A'=\emptyset$.

יהי $b\in(B(a,\varepsilon)\setminus\{a\})\cap A'$. ולכן, $b\in A'$, $b\in B(a,\varepsilon)\setminus\{a\}$.

לכל $t>0$ מתקיים:

$$c\in (B(b,t)\setminus\{b\})\cap A\neq\emptyset$$

נרצה ב- $t=\min\{d(a,b),\varepsilon-d(a,b)\}$.

כעת: $c\in B(b,t)\setminus\{b\}$. מתקיים:

$$d(c,b)<\varepsilon-d(a,b)\ \Rightarrow\ \begin{matrix} d(c,b)+d(a,b)<\varepsilon \\ d(c,a)<\varepsilon \\ c\in B(a,\varepsilon)\end{matrix}$$

$$d(c,b)<d(a,b)\ \Longrightarrow\ c\neq a$$

ומכאן נקבל כי $c\in B(a,\varepsilon)\setminus\{a\}$

ומכיוון ש- c היה במקור שייך ל- A נקבל $(B(a,\varepsilon)\setminus\{a\})\cap A\neq\emptyset$. מש"ל.

קומפקטיות

הגדרה: כיסוי פתוח/תת-כיסוי.

יהי M מ"מ. אוסף של קבוצות פתוחות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ייקרא "כיסוי פתוח של M" אם $\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha=M$.

2) אם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הוא כיסוי של M, ו- $J\subseteq I$ היא תת-קבוצה של אינדקסים וגם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הוא בעצמו כיסוי של M. נאמר ש- $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הוא תת-כיסוי.

הגדרה: מ"מ M נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של M קיים תת"כ סופי.

(הגדרה: M קומפקטי אם לכל ת"ק אינסופית יש נ"ק הצטברות)

תרגיל: במ"מ דיסקרטי כל נקודון הוא קבוצה פתוחה.

פתרון: $B(x,1)=\{y\in X: d(x,y)<1\}=\{x\}$. ולכן $\{x\}$ פתוח.

מסקנה: במ"מ דיסקרטי כל קבוצה היא פתוחה.

תרגיל: מ"מ דיסקרטי הוא קומפקטי $\Longleftrightarrow$ הוא סופי.

פתרון: $\boxed{\Longleftarrow}$ $M=\bigcup_{x\in M}\{x\}$. M קומפקטי ולכן קיים תת-כיסוי סופי $\Leftarrow$ $M=\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}$ $\Leftarrow$ M סופי.

$\boxed{\Longrightarrow}$ תרגיל.

תרגיל: הראו שהקבוצה הבאה אינה קומפקטית:

$$(0,1]\subseteq\mathbb{R}$$

פתרון: $(0,1]=\bigcup_{2\le n\in\mathbb{N}}(\frac{1}{n},1]$. נניח שיש לכיסוי זה ת"כ סופי

$$(0,1]=\bigcup_{i=1}^{k}(\frac{1}{n_i},1]$$

נקח n_i מקסימלי ונסמן ב- n_0. קל לראות $\frac{1}{n_0}\in(0,1]$ אבל $\frac{1}{n_0}$ לא שייך לאיחוד, ולכן זה לא כיסוי. מש"ל.

$\boxed{\text{תרגיל 4}}$ 2.5.12

תרגיל: הוכיחו שת"ק סופית במ"מ אין נקודת הצטברות.

פתרון: יהי (X,d) מ"מ ותהי $A\subseteq X$ ת"ק סופית.

נניח בשלילה ש- $a\in A$ נ"ק הצטברות. ראינו בכיתה שזה אומר שקיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq A$ שכל איבריה שונים כך ש- $x_n\to a$.
אבל $|\{x_n\}|=\aleph_0$, וכן $|A|<\aleph_0$ בסתירה. ולכן a אינה נ"ק הצטברות.

מוטיבציה: ראינו בכיתה שמ"מ קומפקטי $\Longleftrightarrow$ לכל קבוצה אינסופית יש נ"ק הצטברות.
לכן, שיטה טובה להוכיח שמ"מ אינו קומפקטי תהיה למצוא קבוצה אינסופית ללא נ"ק הצטברות.

תרגיל: הוכיחו כי $\mathbb{Z}$ היא קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}$.

פתרון: דרך 1: נראה ש- $\mathbb{Z}^c$ פתוחה. $\mathbb{Z}^c=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n,n+1)$ ולכן $\mathbb{Z}^c$ פתוחה כאיחוד של קבוצות פתוחות.

דרך 2: [קבוצה סגורה: מכילה את כל נ"ק ההצטברות שלה]

נראה של- $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$ אין נ"ק הצטברות ולכן סגורה.

שלב 1: תהי $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. נראה ש- x אינה נ"ק הצטברות. נניח בשלילה שכן. לכן קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq\mathbb{Z}$ כך ש- $x_n\to x$.
מ"ש $x_n\to x$ ח"ב להתקיים $d(x_n,x)\to 0$. אבל, אם נסמן $t=\min\{x-[x],[x]+1-x\}$, נקבל $d(x_n,x)\geq t\not\to 0$. סוף שלב 1

שלב 2: תהי $x\in\mathbb{Z}$. נראה שהיא אינה נ"ק הצטברות.
נניח בשלילה: x נ"ק הצטברות של $\mathbb{Z}$ ולכן קיימת סדרה ב- $\{x_n\}\subseteq\mathbb{Z}\setminus\{x\}$ כך ש- $x_n\to x$.
וראינו בש.ב: סדרה מתכנסת ב- $\mathbb{Z}$ אמ"מ היא קבועה לבסוף. כלומר $x_n=x$ החל מ- n מסוים, בסתירה. סוף שלב 2.

לכן אין ל- $\mathbb{Z}$ נ"ק הצטברות ולכן $\mathbb{Z}$ סגורה ב- $\mathbb{R}$.

שאלה: מדוע $\mathbb{R}$ אינו קומפקטי?
כי מצאנו ת"ק אינסופית ($\mathbb{Z}$) שאין לה נ"ק הצטברות.

תרגיל: הוכיחו שכל תק' לא ריקה בת מניה של $\mathbb{R}$ אינה פתוחה.

פתרון: תהי $\emptyset\neq A\subseteq\mathbb{R}$ תק' בת מניה. נניח ש- A פתוחה. יהי $a\in A$ (קיים כי $A\neq\emptyset$). לכן קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $a\in B(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subseteq A$
אבל $\aleph=|(a-\varepsilon,a+\varepsilon)|\le|A|\le\aleph_0$ בסתירה.

הגדרה: נאמר שמ"מ הוא שלם אם כל סדרת קושי מתכנסת (לנקודה) במרחב זה.

תרגיל/דוגמא: נראה שהמרחב $(\mathbb{Z},d_5)$ אינו שלם.

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \frac{1}{5^{k(x,y)}} & x\neq y\end{cases}$$

כאשר $k(x,y)=\max\{i\in\mathbb{N}_0 : 5^i \mid x-y\}$

פתרון: נמצא סדרת קושי שאינה מתכנסת ב- $\mathbb{Z}$.

$$x_n=5^1+5^2+\dots+5^n$$

טענה 1: $\{x_n\}$ סדרת קושי.

$$k(x_n,x_m)=\max\{i : 5^i \mid (5^m+5^{m-1}+\dots+5^n+\dots+5)-(5^n+\dots+5)\}=\max\{i: 5^i\mid 5^{n+1}+\dots+5^m\}=n+1$$

ולכן $d_5(x_n,x_m)=\frac{1}{5^{n+1}}$.

יהי $\varepsilon>0$: אזי קיים n_0 המקיים $\frac{1}{5^{n_0+1}}<\varepsilon$. ולכן $d_5(x_n,x_m)=\frac{1}{5^{n+1}}\le\frac{1}{5^{n_0+1}}<\varepsilon$ ולכן $\{x_n\}$ סדרת קושי. מ"ש

כעת יש להראות ש- $\{x_n\}$ אינה מתכנסת ב- $(\mathbb{Z},d_5)$
נניח $x_n\xrightarrow{d_5}x$. $\Longrightarrow d(x_n,x)\to 0$

טענה 2: נניח לרגע $5\nmid x$. אבל $5\mid x_n$ ולכן $5^1\nmid(x_n-x)$ $\Longrightarrow$ $d_5(x_n,x)=\frac{1}{5^0}=1\not\to 0$

טענה 3: אם $x_n\to x$ אזי $\frac{x_n-5}{5}\to\frac{x-5}{5}$

הוכחה:

$$d_5(x_n,x)\overset{?}{=}d_5\left(\tfrac{x_n-5}{5},\tfrac{x-5}{5}\right)\longleftarrow \quad k\left(\tfrac{x_n-5}{5},\tfrac{x-5}{5}\right)=\max_i\{5^i\mid \tfrac{x_n}{5}-\tfrac{x}{5}\}\Rightarrow d_5\left(\tfrac{x_n-5}{5},\tfrac{x-5}{5}\right)=d_5\left(\tfrac{x_n}{5},\tfrac{x}{5}\right)$$

$$j+1=k(x_n,x)=\max_i\{5^i\mid x_n-x\}\qquad k\left(\tfrac{x_n}{5},\tfrac{x}{5}\right)=\max_i\{5^i\mid\tfrac{x_n}{5}-\tfrac{x}{5}\}=j$$

$$\frac15\underset{\frac{1}{5^j}}{\underbrace{d_5(x_n,x)}}=\underset{\frac{1}{5^{j+1}}}{\underbrace{d_5\left(\tfrac{x_n}{5},\tfrac{x}{5}\right)}}$$

ולסיכום (כיוונים): $\frac15 d_5(x_n,x)=d_5(\frac{x_n}{5},\frac{x}{5})=d_5(\frac{x_n-5}{5},\frac{x-5}{5})$, ולכן $\frac{x_n-5}{5}\to\frac{x-5}{5}$. נשים לב כי $x_{n-1}=\frac{x_n-5}{5}$

$x_n\to x$ ו- $x_{n-1}=\frac{x_n-5}{5}\to\frac{x-5}{5}$ ומיחידות הגבול: $x=\frac{x-5}{5}\Rightarrow x=-\frac54\notin\mathbb{Z}$!! מ"ש.

למה: יהי (X,d) מ"מ ותהי $\{x_n\}\subseteq X$ סדרת קושי. אם $\{x_{n_k}\}$ תת-סדרה שמתכנסת ל- x אזי גם $\{x_n\}$ מתכנסת ל- x.

הוכחה: $x_{n_k}\to x$, ולכן קיים k_0 כך שלכל $k\ge k_0$: $d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}$. $\{x_n\}$ היא קושי, ולכן קיים n_1 כך שלכל $m,n\ge n_1$ מתקיים $d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$, ונניח כי $n_1\le n_{k_0}$: אם לא מתקיים, נגדיל את k_0 עד ש- $n_1\le n_{k_0}$. כעת נקבל שלכל $n\ge n_1$:

$$d(x_n,x)\le d(x_n,x_{n_{k_0}})+d(x_{n_{k_0}},x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

תרגיל: הוכיחו כי מרחב מטרי קומפקטי הוא שלם.

פתרון: תזכורת: מ"מ קומפקטי $\Longleftrightarrow$ לכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת.
יהי (X,d) מ"מ קומפקטי. צ"ל להראות שהוא שלם יש להראות שכל סדרת קושי מתכנסת. תהי $\{x_n\}$ סדרת קושי.
לפי התזכורת יש לה תת מתכנסת. אבל לפי הלמה זה אומר שהיא עצמה מתכנסת. מ"ש

הגדרת טופולוגיה

<u>הגדרה:</u> מרחב טופולוגי הוא זוג סדור (X,τ), X קבוצה כלשהי. $\tau\subseteq P(X)$ מוגדר להיות אוסף תת קב׳ של X המקיים:

1. $X,\emptyset\in\tau$
2. יהיו $\{U_i\}_{i\in I}\in\tau \Rightarrow \bigcup_{i\in I}U_i\in\tau$.
3. $U_1,U_2\in\tau \Rightarrow U_1\cap U_2\in\tau$.

נקרא לקבוצות ב-τ "הקבוצות הפתוחות" (ההגדרה דואלית עבור קבוצות סגורות)

<u>הגדרה:</u> הטופולוגיה הקו-סופית co-finite.
תהי $X\neq\emptyset$:

$$\tau_{co-finite}=\{U\subseteq X \mid |U^c|<\infty\}\cup\{\emptyset\}$$

<u>במילים אחרות:</u> A סגורה ב-τ_{cof} $\iff$ A סופית או $A=X$.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו ש-τ_{cof} היא אכן טופולוגיה.
<u>פתרון:</u> נראה זאת באמצעות הק׳ הסגורות.

1. X סגורה, $\emptyset$ סגורה.
2. יהיו $\{U_i\}_{i\in I}$ סגורות וצ״ל $\bigcap_{i\in I}U_i$ סגור. אם $U_i=X$ לכל $i\in I$ ולכן $\bigcap U_i$ סגור. אם לא, אזי קיים $i_0\in I$ כך ש: $U_{i_0}\neq X$. ולכן סופית. כי $\bigcap U_i\subseteq U_{i_0}$ ולכן בגלל ש-U_{i_0} סופית, נקבל $\bigcap U_i$ סופית ולכן סגורה.
3. יהיו U_1,U_2 סגורות וצ״ל $U_1\cup U_2$ סגורה. אם $U_1=X$ או $U_2=X$ אזי $U_1\cup U_2=X$ ולכן סגור. אחרת, $U_1\neq X$, $U_2\neq X$ ולכן שתיהן סופיות ולכן $|U_1\cup U_2|\le|U_1|+|U_2|<\infty$. ולכן τ_{cof} טופולוגיה. מ.ש.ל

9.5.12

תרגול 5

ההוכחה של פירסטנברג שיש אינסוף ראשוניים: (ההוכחה הקלאסית באינדוקציה)
<u>הרעיון:</u> להגדיר טופולוגיה "מוזרה" על $\mathbb{Z}$
<u>הגדרה:</u> הטופ׳ הפרו-סופית על $\mathbb{Z}$:
נאמר שקב׳ $O\subseteq\mathbb{Z}$ היא פתוחה $\iff$ לכל $x\in O$ קיימת סדרה חשבונית דו-צדדית $x\in S\subseteq O$
מהי סדרה חשבונית דו-צדדית? קב׳ מהצורה:

$$a+d\mathbb{Z} \quad d\in\mathbb{N},\ a\in\mathbb{Z}$$

$$\dots,a-d,\ a,\ a+d,\dots$$

במילים אחרות: קבוצה היא פתוחה $\iff$ היא איחוד של סדרות חשבוניות דו-צדדיות.

נוכיח שהטופולוגיה הפרו-סופית היא אכן טופולוגיה.
(א) $\emptyset$ פתוחה באופן הריק. $\mathbb{Z}$ פתוחה, כי לכל $x\in\mathbb{Z}$, $x+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}$.
(ב) איחוד כלשהו של פתוחות ב-$\mathbb{Z}$.
$\bigcup_{i\in I}O_i$ פתוח כי: יהי $x\in\bigcup_{i\in I}O_i$ $\Leftarrow$ קיים $i\in I$ כך ש-$x\in O_i$ $\Leftarrow$ קיימת סדרה חשבונית דו-צדדית $S=x+d\mathbb{Z}$ כך ש $x\in S\subseteq O_i\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i$
(ג) <u>חיתוך:</u> צ״ל אם O_1 פתוחה וגם O_2 פתוחה, אזי $O_1\cap O_2$ פתוחה.
יהי $x\in O_1\cap O_2$ $\Leftarrow$ $x\in O_1$, $x\in O_2$ $\Leftarrow$ $x\in S_1=x+d_1\mathbb{Z}\subseteq O_1$ וגם $x\in S_2=x+d_2\mathbb{Z}\subseteq O_2$.
נראה ש-$S_3=x+d_1d_2\mathbb{Z}\subseteq O_1\cap O_2$.

$$S_3=x+d_1d_2\mathbb{Z}\subseteq x+d_1\mathbb{Z}=S_1\subseteq O_1$$

בצורה דומה $S_3\subseteq O_2$

ולכן $S_3\subseteq O_1\cap O_2$.

<u>טענה:</u> הראו שכל סדרה חשבונית דו-צדדית היא סגוחה.
<u>הוכחה:</u> $S=a+d\mathbb{Z}$ פתוחה. לכל $x\in S$ מתקיים $S=a+d\mathbb{Z}=x+d\mathbb{Z}$.
$x\in a+d\mathbb{Z}$ $\Leftarrow$ קיים m כך ש- $x=a+dm \iff a=x-dm \iff a\in x+d\mathbb{Z}$ (המשך בד״ה)

נזכר ביחס מודולו d על $\mathbb{Z}$: $a\equiv b \pmod d$ הוא יחס שקילות.

$$\mathbb{Z}/_{\equiv}=\{[0],\dots,[d-1]\}$$
$$a+d\mathbb{Z}=[a]$$
$$x\in[a] \Longrightarrow [x]=[a]$$
$$[x]=x+d\mathbb{Z}$$

נראה ש- $a+d\mathbb{Z}=[a]$

$$[a]^c=[0]\cup\dots\widehat{[a]}\cup\dots[d-1]$$

משמיטים את המחלקה של a

$[a]^c$ פתוחה כאיחוד של קבוצות פתוחות $\Leftarrow$ $[a]$ סגורה. מ.ש.ל

<u>הגדרה</u>: (התכנסות בט"מ) נאמר $x_n\xrightarrow{\tau}x$ אם לכל סביבה $x\in\mathcal{U}$ קיים N כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $x_n\in\mathcal{U}$.

<u>הגדרה</u>: טופולוגיית קו-מניה $\tau_{co-\aleph_0}$, זה הקבוצות הסגורות הן הקבוצות הבנות-מניה או כל המרחב.

$$\tau_{co-\aleph_0}=\{A\subseteq X \mid |A^c|\le\aleph_0\}\cup\{\emptyset\}$$

נאפיין את הסדרות המתכנסות ב- $\tau_{co-\aleph_0}$

נניח $x_n\to a$. נשים לב שכל סדרה $\{x_n\}$ היא בת-מניה $\Leftarrow$ $\{x_n\}$ סגורה.

$$\mathcal{U}=(X\setminus\{x_n\})\cup\{a\}$$

אזי $\mathcal{U}$ פתוחה, כי $\mathcal{U}^c$ מוכל ב- $\{x_n\}$ שהוא בת מניה.

$a\in\mathcal{U}$, ולפי הגדרת התכנסות קיים N כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $x_n\in\mathcal{U}$ $\Leftarrow$ $x_n=a$ לכל $n\ge N$.

$\Leftarrow$ אם סדרה מתכנסת אזי היא קבועה לבסוף. (גם ההפך נכון).

<u>תרגיל</u>: X קבוצה כך ש- $|X|>\aleph_0$, ונתבונן ב- $(X,\tau_{co-\aleph_0})$

(א) הראו ש- $\tau_{co-\aleph_0}\ne\tau_{disc}$.

<u>פתרון</u>: כל קבוצה ב- τ_{disc} פתוחה, ולכן מספיק למצוא קבוצה שאינה פתוחה ב- $\tau_{co-\aleph_0}$.

$a\in X$. האם $\{a\}$ פתוחה ב- $\tau_{co-\aleph_0}$? לא, $\{a\}^c=X\setminus\{a\}$ ו- $X\setminus\{a\}$ אינה בת-מניה. מ.ש.ל

(ב) האם $(X,\tau_{co-\aleph_0})$ הוא מרחב מטריזבילי? (עזור: X לא בת-מניה)

<u>פתרון</u>: בהינתן (X,d) $\longleftarrow$ ניתן ליצור ט"מ (X,τ_d) שמושרה מהמטריקה.

מחפשים תכונה של מרחבים מטריים, שאינה קיימת במרחב שלנו ואז נדע שהמרחב אינו מטריזבילי.

נניח שהמרחב שלנו מטריזבילי $(X,\tau_{co-\aleph_0})$. כלומר מטריקה d המשרה אותו.

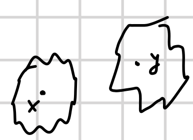
$$x_n\xrightarrow{d}a \iff x_n\xrightarrow{\tau_{co-\aleph_0}}a$$

סדרות קבועות לבסוף

לפי כד: שקילות מטריקות המטריקה היחידה
בה כל הסדרות המתכנסות קבועות לבסוף
היא המטריקה הדיסקרטית

$\Leftarrow$ d המטריקה הדיסקרטית $\Leftarrow$ המטריקה המושרית מ- d היא τ_{disc}, אבל $\tau_{co-\aleph_0}\ne\tau_{disc}$, סתירה. מ.ש.ל

<u>הגדרה</u>: מרחב נקרא מרחב "האוסדורף" אם לכל $x,y\in X$ כך ש- $x\ne y$ קיימות סביבות $x\in\mathcal{U}_x$, $y\in\mathcal{U}_y$ כך ש- $\mathcal{U}_x\cap\mathcal{U}_y=\emptyset$.



<u>הערה</u>: כל מרחב מטרי הוא האוסדורף. לכן לא האוסדורף $\Leftarrow$ לא מטריזבילי.

נראה ש- $(X,\tau_{co-\aleph_0})$ אינו מרחב האוסדורף. נניח שכן האוסדורף.

$x,y\in X$, $x\ne y$. לפי ההנחה קיימות סביבות $x\in\mathcal{U}_x$, $y\in\mathcal{U}_y$ כך ש- $\mathcal{U}_x\cap\mathcal{U}_y=\emptyset$ $\Leftarrow$ $X=\mathcal{U}_x^c\cup\mathcal{U}_y^c$.

לא בת מניה | סגורה ולכן בת מניה | סגורה ולכן בת מניה

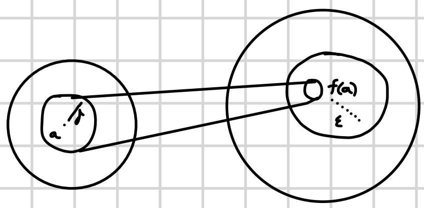
ולכן X בת-מניה. סתירה.

הערה: הראינו בתרגול האחרון שמ"מ לא נקבע ע"י הסדרות המתכנסות 12. $\tau_{co-\aleph_0} \neq \tau_{disc}$
מ"מ כן נקבע ע"י התכנסות הסדרות. כי (X,d_2) שקול (X,d_1) $\iff$ $x_n \xrightarrow{d_2} a \iff x_n \xrightarrow{d_1} a$.

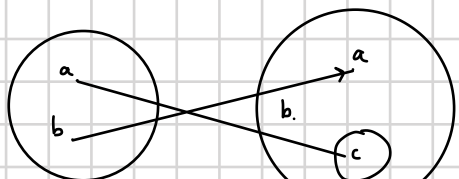
משפט: יהיו $\sigma \subseteq \tau$ שתי טופולוגיות על X. אזי $x_n \xrightarrow{\tau} a \Rightarrow x_n \xrightarrow{\sigma} a$.
הגדרה: (הישר של סורגנפריי) נגדיר את הטופולוגיה T על $\mathbb{R}$. נסמן ב- $\mathbb{R}_\ell = (\mathbb{R}, T)$
קבוצה היא פתוחה $\iff$ היא איחוד של קבוצות מהצורה $[a,b)$.

בתרגיל בית: $\mathbb{R}_\ell$ נ"ל, כך ש- T מכילה את הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$ (המושרית מהמטריקה)
תרגיל: הראו שהסדרה $\{-\frac{1}{n}\}$ אינה מתכנסת בישר של סורגנפריי.
פתרון: אם $\{-\frac{1}{n}\}$ מתכנסת בסורגנפריי אזי היא מתכנסת ב- $\mathbb{R}$, $\{-\frac{1}{n}\} \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$.
לכן גם בסורגנפריי נקבל ש- $\{-\frac{1}{n}\} \xrightarrow{\mathbb{R}_\ell} 0$.
רוצים להראות שזה לא ייתכן. מספיק למצוא סביבה של 0 שאינסוף איברים של $\{-\frac{1}{n}\}$ לא נמצאים בה.
נבחר את הסדרה $[0,1)$, $0 \in [0,1)$, $-\frac{1}{n} \notin [0,1)$ לכל n. סתירה. מ.ש.ל

רציפות בנקודה: $f:(X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$. נרצה להגדיר רציפות בנק' $a \in X$. נזכר בעזרת ציור ברציפות בנק' במ"מ



הגדרה: נאמר ש- f רציפה ב- a אם לכל סביבה $f(x) \in \mathcal{U}$ קיימת סביבה $a \in V$ כך ש- $f(V) \subseteq \mathcal{U}$.
תרגיל: $X = \{a,b\}$, $Y = \{a,b,c\}$
$\tau_X = \{\emptyset, X\}$, $\tau_Y = \{\emptyset, \{c\}, Y\}$
ופונקציה $f: X \to Y$, $f(b) := a$, $f(a) := c$.
בדקו רציפות ב- a,b



האם f רציפה ב- b? כן.
נעבור על כל הסביבות האפשריות של $f(b)=a$ ב- Y. הסביבה היחידה היא Y. צריך למצוא סביבה V של b ב- X
כך ש- $f(V) \subseteq Y$. נבחר $V = X$ (זאת הסביבה היחידה של b) ומתקיים $f(X) \subseteq Y$.
האם f רציפה ב- a? לא. למה? כי $\{c\}$ סביבה של $f(a)=c$ והסביבה היחידה של a ב- X היא $V=X$.
$$f(V) \nsubseteq \{c\}$$
לכן לא ניתן "להשחיל" סביבה של a בתוך הסביבה של $f(a)$.

הגדרה: (רציפות גלובלית) נאמר ש $f: X \to Y$ היא רציפה אם היא רציפה בכל $a \in X$.
משפט: f רציפה $\iff$ $f^{-1}(V)$ פתוחה לכל V פתוחה. במילים אחרות: תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא פתוחה.
f רציפה $\iff$ תמונה הפוכה של סגורה היא סגורה.
(רציפות לפי היינה לא עובדת במ"ט)

16.5.12

תרגול 6

משפט: יהיו X,Y מ"ט ויהי $\{U_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X. תהי $f_i: U_i\to Y$ פונקציה רציפה לכל $i\in I$ ונניח שלכל $x\in X$ אם $x\in U_i\cap U_j$ אזי $f_i(x)=f_j(x)$. אזי הפונקציה $F: X\to Y$ המוגדרת ע"י האוסף $\{f_i\}_{i\in I}$ הנ"ל רציפה.

שימו ♡: קיים משפט דומה רק עבור כיסוי סופי של סגורות.

דוגמא: נתבונן בפונקציה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in[0,1] \\ 2-x & x\in[1,2]\end{cases}$$

$[0,2]=[0,1]\cup[1,2]$
כיסוי סגור סופי של התחום

$f_1:[0,1]\to\mathbb{R}$
$f_1(x)=x$ רציפה

$f_2:[1,2]\to\mathbb{R}$
$f_2(x)=2-x$ רציפה.

עכשיו, צריך שיתלכדו על החיתוך:

$$[0,1]\cap[1,2]=\{1\}$$
$$f_1(1)=1=f_2(1)=2-1$$

$\Leftarrow$ תנאי המשפט מתקיימים ולכן f רציפה.

דוגמא: נתבונן ב- $(\mathbb{R},T)$ (סורגנפריי). נגדיר פונקציה $f:(\mathbb{R},T)\to\mathbb{Z}$ ע"י $f(x)=[x]$. נרצה להראות ש-f רציפה.
נרצה למצוא כיסוי פתוח של $(\mathbb{R},T)$: $\{[n,n+1)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. על כל איבר בכיסוי נגדיר בכיסוי פונקציות

$$f_n:[n,n+1)\to\mathbb{Z}$$
$$f_n(x)=n$$

* התנאי של המשפט מתקיים באופן הריק (כי אין חיתוך בין איברי הכיסוי)
ניתן להראות ש-f אכן מוגדרת באמצעות $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. לכל $x\in\mathbb{R}$ קיים $n_0\in\mathbb{Z}$ יחיד: $n_0\le x<n_0+1$

$$f(x)=f_{n_0}(x)=n_0$$

תרגיל: יהי X מ"ט. יהיו $f,g: X\to\mathbb{R}$ פונק' רציפות.
1. הוכיחו כי הקבוצה $A=\{x\in X : f(x)=g(x)\}$ היא סגורה ב-X.
2. החליפו את הטופולוגיה על $\mathbb{R}$ ומצאו דוגמא נגדית.

פתרון: ① $A=\{x\in X: (f-g)(x)=0\}$

$$=\underbrace{(f-g)}_{\text{רציפה כהפרש רציפות}}{}^{-1}(\underbrace{0}_{\text{סגור}})$$

ולכן A סגורה.

② נחליף את הטופולוגיה לטופולוגיה הטריוויאלית.

$$f,g:(\mathbb{R},|\cdot|)\to(\mathbb{R},T_{triv})$$

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1)\\ 1 & \text{else}\end{cases}\quad,\quad g(x)=0$$

קל לראות ש- $A=[0,1)$ (אלא הנק' בהן f,g מתלכדות) ועם זאת A אינה סגורה ב- $\mathbb{R}$.

פונקציות פתוחות/סגורות

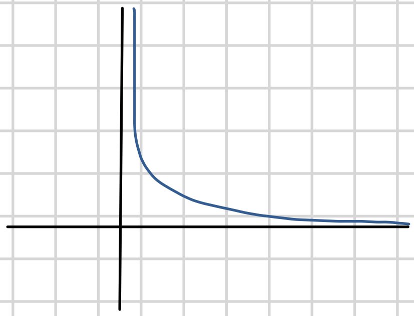
הגדרה: תהי $f:X\to Y$ פונקציה. נאמר ש-f פתוחה [סגורה] אם $\forall U\subseteq X$ פתוחה $\leftarrow$ $f(U)\subseteq Y$ פתוחה
[$\forall V\subseteq X$ סגורה $\leftarrow$ $f(V)\subseteq Y$ סגורה]

דוגמאות: $f:(X,T_{triv})\to Y$ "על", אז f פתוחה. [$f(\phi)=\phi$, $f(X)=Y$]

תרגיל: תהי $P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציית ההטלה על הרכיב הראשון. הוכיחו:
① P רציפה. ② P פתוחה. ③ P אינה סגורה.

פתרון: ① ✓ ② נוכיח ש-P פתוחה. כלומר, תהי $U\subseteq\mathbb{R}^2$ פתוחה, ונרצה להראות ש-$P(U)$ פתוחה ב-$\mathbb{R}$.
יהי $x\in P(U)$. נרצה להראות שקיים $\varepsilon>0$ כך ש-$x\in B(x,\varepsilon)\subseteq P(U)$. יהי $x\in P(U)$ $\Leftarrow$ קיים $y\in\mathbb{R}$ כך ש-$(x,y)\in U$.
אבל $U\subseteq\mathbb{R}^2$ פתוחה ולכן קיים $\varepsilon'>0$ כך ש-$(x,y)\in B((x,y),\varepsilon')\subseteq U$. [נרצה להראות: $x\in B(x,\varepsilon')\subseteq P(U)$]

נראה את ההכלה $B(x,\varepsilon')\subseteq P(\mathcal{U})$. יהי $z\in B(x,\varepsilon')$. ונרצה להראות $z\in P(\mathcal{U})$.
$z\in B(x,\varepsilon') \longrightarrow d(x,z)<\varepsilon'$. הניח (y,z) תמשה את הדרוש. $d((z,y),(x,y)) = |z-x| < \varepsilon'$. $(z,y)\in B((x,y),\varepsilon')\subseteq \mathcal{U}$
ולכן $(z,y)\in\mathcal{U}$, מכאן $p(z,y)\in P(\mathcal{U}) \Leftarrow z\in P(\mathcal{U})$.



ⓑ $A=\{xy=1,\ x>0\}$ (ראינו שהיא סגורה)
$P(A) = (0,\infty)$ לא סגורה ב- $\mathbb{R}$.
ולכן p אינה סגורה.

קשירות

<u>הגדרה</u>: נאמר ש-X לא-קשיר אם קיימות שתי קבוצות $\mathcal{U},V$ פתוחות, זרות ולא ריקות כך ש- $X=\mathcal{U}\cup V$.
אחרת נאמר ש-X קשיר (Connected)

<u>הגדרות שקולות</u>: ① כנ"ל עם קבוצות סגורות.
② X לא קשיר אם קיימת בו קבוצה סגוחה לא טריוויאלית.

<u>תרגיל</u>: יהי X מ"ט ויהי $I=\{0,1\}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית. עבור $A\subseteq X$ נגדיר $\chi_A:X\to I$ ע"י

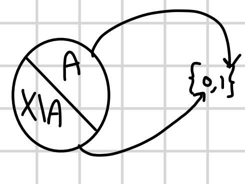
$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

הוכיחו: χ_A רציפה $\Longleftrightarrow$ A סגוחה.
<u>פתרון</u>: $\boxed{\Longrightarrow}$ נניח ש-A סגוחה, וצ"ל χ_A רציפה.

$\chi_A^{-1}(I)= X$ פתוחה
$\chi_A^{-1}(\{0\})= X\setminus A$ פתוחה (כי סגורה ולכן משלימה פתוחה)
$\chi_A^{-1}(\{1\})= A$ פתוחה
$\chi_A^{-1}(\varnothing)=\varnothing$ פתוחה

$\boxed{\Longleftarrow}$ χ_A רציפה וצ"ל A סגוחה.
$A=\chi_A^{-1}(\{1\})$ פתוחה ($\{1\}$ פתוחה)
$A=\chi_A^{-1}(\{1\})$ סגורה ($\{1\}$ סגורה)

<u>מסקנה</u>: X לא קשיר $\Longleftrightarrow$ קיימת פונקציה רציפה ועל $f:X\to\{0,1\}$.



$A=\{x\in X : f(x)=1\}$

<u>נימוק</u>: A סגוחה, כי אז יוצא ש-X לא קשיר (A דוגמא אינה טריוויאלית)
עכשיו אפשר להשתמש בדוגמה של f רציפה ולמשל $f=\chi_A$. לכן מהתרגיל נקבל ש-A סגוחה (לא טריוויאלית) ולכן X אינו קשיר.

<u>משפט</u>: יהיו X,Y מ"ט, $f:X\to Y$ רציפה. אזי אם X קשיר $\longrightarrow$ $f(X)$ קשיר.
<u>תרגיל</u>: נתבונן ב- $GL_n(\mathbb{R})$ כת"מ של $M_n(\mathbb{R})$. האם $GL_n(\mathbb{R})$ קשיר?
<u>פתרון</u>: $\det: GL_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$
אם $GL_n(\mathbb{R})$ היה קשיר אזי גם $\det(GL_n(\mathbb{R}))=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ היה קשיר (וזה לא נכון).

סגור במ"ט

<u>הגדרה</u>: יהי X מ"ט ותהי $S\subseteq X$ קבוצה.
$cl(S)=$ הקבוצה הסגורה המינימלית שמכילה את S = הסגור של S

$$=\bigcap_{\substack{F \text{ סגורה}\\ S\subseteq F}} F$$

אפיון נוסף: $p\in cl(A) \iff$ כל סביבה של p חותכת את A לא טריוויאלית. כלומר, לכל U סביבה של p, $U\cap A\neq\emptyset$.

תרגיל: יהי (X,d) מ"מ. $A\subseteq X$ קבוצה כלשהי. הראו $p\in cl(A) \iff$ קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq A$ כך ש- $x_n\to p$.

פתרון: $\boxed{\Rightarrow}$ נכון גם במ"ט כללי.

$\boxed{\Leftarrow}$ נכון רק במ"מ.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\{x_n\}\subseteq A$, $x_n\to p$ ורוצה להראות ש- $p\in cl(A)$. אזי לכל סביבה U של p קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$: $x_n\in U$ אבל $x_n\in A$ ולכן $x_n\in U\cap A$. ולכן הראינו שכל סביבה של p חותכת את A לא טריוויאלית ולכן $p\in cl(A)$.

* נמצא דוגמה נגדית לכיוון השני, במ"ט כללי (שאינו מטריזבילי)

נתבונן ב- $(\mathbb{R},\tau_{co-\aleph_0})$. ותהי $|A|>\aleph_0$, שכן אז A אינה סגורה (כמובן $A\neq\mathbb{R}$)

$$cl(A)=\mathbb{R}$$

כעת ניקח $p\in\mathbb{R}\setminus A$ וקל לראות שאין סדרה $\{x_n\}\subseteq A$ שמתכנסת ל-p. (כי הסדרות היחידות המתכנסות במרחב זה הן הקבועות לבסוף)

מש"ל

23.5.12

$\boxed{\text{תרגול } 7}$

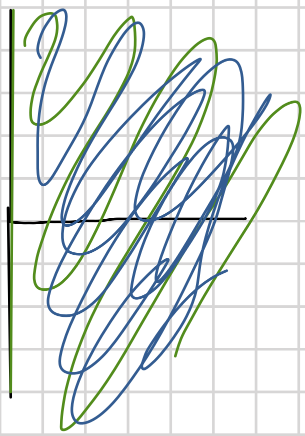
הגדרה: (פנים) תהי $A\subseteq X$.
$$int(A)=\mathring{A}=\bigcup_{\substack{U\subseteq A \\ \text{פתוחה } U \\ X\text{-ב}}} U$$

[פנים ב-A היא הקבוצה הפתוחה המקסימלית שמוכלת ב-A]

אפיון נוסף: $x\in int(A) \iff$ קיימת U פתוחה כך ש- $x\in U\subseteq A$.

תרגיל: מצאו סגור ופנים של הקבוצה הבאה ב- $\mathbb{R}^2$:

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\neq 0\}$$



פנים: $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y\neq 0\}$

טענה: $int(A)=C$.

הוכחה: הכלה דו-כיוונית:

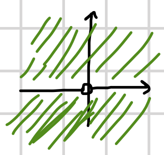
- $C\subseteq int(A)$, $A\supseteq C$ אבל C פתוחה ולכן $C\subseteq int(A)$

אז נותר להראות שאכן C פתוחה.

$$C=\underbrace{\{(x,y)\mid x>0\}}_{C_1}\cap\underbrace{\{(x,y)\mid y\neq 0\}}_{C_2}$$

נראה למה C_1, C_2 פתוחות [ואז C תהיה פתוחה כחיתוך סופי של קבוצות פתוחות]

$\underline{C_2}$



$P_2(C_2)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$C_2=P_2^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

$\underline{C_1}$

$P_1(C_1)=(0,\infty)$

$C_1=P_1^{-1}((0,\infty))$

- $int(A)\subseteq C \iff A\setminus int(A)\supseteq A\setminus C$

תהי $(x,y)\in A\setminus C$. שימו ♡: $(0,y)\in A$. $(0,y)\notin int(A)$ • כי בכל סביבה של $(0,y)$ יש נק' שאינן נמצאות ב-A.

וזאת כי בכל סביבה U של $(0,y)$ קיים כדור פתוח $B((0,y),\varepsilon)$ אבל: $(-\frac{\varepsilon}{2},y)\in B((0,y),\varepsilon)$ $A\not\ni$ מש"ל טענה 1

סגור

תהי $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0\}$

טענה 2: $cl(A)=B$.

הוכחה 2: הכלה דו-כיוונית.

• $cl(A)\subseteq B$ ($A\subseteq B$ ו- B סגורה) $\leftarrow cl(A)\subseteq B$.

נראה ש- B אכן סגורה.

$$P_1(B)=[0,\infty)$$
$$B=P_1^{-1}(\underbrace{[0,\infty)}_{\text{סגורה}})$$

ולכן B סגורה.

• $B\supseteq cl(A)$. תהי $(x,y)\in B$. נרצה להראות שקיימת $\{(x_n,y_n)\}\subseteq A$ כך ש: $(x_n,y_n)\to(x,y)$:

$(x,y)\in A$

$\{(x_n,y_n)\}=\{(x,y)\}$

$(x,0)\in B\setminus A$

$\{(x,\frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$

$(x,\frac{1}{n})\to(x,0)$

$\leftarrow$ הראינו ש- $(x,y)\in cl(A)$. מ.ש.ל טענה ב + תרגיל

<u>הגדרה:</u> יהי X מ"ט. $A\subseteq X$. נאמר ש- A צפופה ב- X אם $cl(A)=X$.

<u>אפיון עם:</u> A צפופה ב- X $\Longleftrightarrow$ לכל $U\subseteq X$ פתוחה ולא ריקה מתקיים $U\cap A\neq\emptyset$.

<u>תרגיל:</u> יהי $(\mathbb{R},\tau_{cof})$. הוכיחו:

א) לכל $A\subseteq\mathbb{R}$ מתקיים: A פתוחה או הפנים של A ריק.

ב) כל קבוצה סופית $B\subseteq\mathbb{R}$ היא סגורה.

ג) כל קבוצה אינסופית היא צפופה.

<u>פתרון:</u>

א) שקול להראות:

$(A$ לא פתוחה$)\Longleftarrow($הפנים של A ריק.$)$

יהי $A\subseteq\mathbb{R}$, ונניח ש- A לא פתוחה. צ"ל $int(A)=\emptyset$. נניח בשלילה ש- $int(A)\neq\emptyset$. כלומר, קיימת U פתוחה $\emptyset\neq U\subseteq A$.

A לא פתוחה $\Leftarrow A^c$ אינסופית. $U\subseteq A\Rightarrow A^c\subseteq U^c\Rightarrow U^c$ אינסופית. $\leftarrow$ U לא פתוחה או $U=\emptyset$, סתירה להנחה.

לכן $int(A)=\emptyset$. מ.ש.ל א

ב) $(B^c)^c$ סופית $\longrightarrow B^c$ פתוחה $\leftarrow B$ סגורה.

ג) תהי $F\subseteq\mathbb{R}$ אינסופית, צ"ל $cl(F)=\mathbb{R}$. F אינסופית. הסגור של F זו הקבוצה הסגורה המינימלית שמכילה את F. הקבוצות הסגורות במרחב זה הן הסופיות ו- $\mathbb{R}$. ולכן הקבוצה הסגורה היחידה שמכילה את F היא $\mathbb{R}\leftarrow cl(F)=\mathbb{R}\leftarrow F$ צפופה.

<u>תרגיל:</u> יהי (X,d) מ"מ. נתון ש $2\leq|X|\leq\aleph_0$. הוכיחו שהמרחב אינו קשיר.

<u>פתרון:</u> נניח בשלילה שהוא קשיר ולכן מקיים את תכונת ערך הביניים. קיימת $a\in X$:

$$f_a:X\to\mathbb{R}$$
$$f_a(x)=d(a,x)$$

קיימת $a\neq b\in X$, $f_a(b)=\varepsilon>0$, $f_a(a)=0$, ולפי משפט ערך הביניים f_a חייבת לקבל את כל הערכים בין 0 ל- ε.

אבל $\aleph=|(0,\varepsilon)|>|X|$. ולכן f_a אינה יכולה לקבל את כל הערכים בקטע $(0,\varepsilon)$.

לכן X אינו מקיים את תכונת ערך הביניים ולכן X אינו קשיר. מ.ש.ל

<u>הגדרה:</u> מ"ט נקרא "קשיר מסילתית" (ק.מ) אם לכל $x,y\in X$ קיימת פונקציה רציפה $f:[0,1]\to X$, $f(1)=y$, $f(0)=x$.

במקרה זה: f נקראית "מסילה בין x ל- y".

<u>תזכורת:</u> מרחב קשיר מסילתית הוא קשיר.

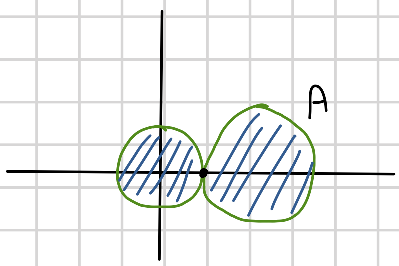
<u>הגדרה:</u> תהי C קבוצה במ"ו. נאמר ש- C "קמורה" אם לכל $x,y\in C$ ולכל $t\in[0,1]$ מתקיים $(1-t)x+ty\in C$

<u>טענה:</u> יהי $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי. תהי $C\subseteq X$ קבוצה קמורה. אזי C קשירה מסילתית.

$\boxed{\text{דוגמא}}$ בכל מרחב נורמי כדור (פתוח או סגור) הוא קבוצה קמורה $\Longrightarrow$ ק.מ $\Leftarrow$ קשיר.

<u>תרגיל:</u> יהי (X,τ_X) מ"ט. יהי $A\subset X$ תת"מ קשיר. הוכח או הפרך: $int(A)$ קשיר.

<u>פתרון:</u>



פנים A: הוא איחוד

זר של שני כדורים פתוחים

ולא ריקים ולכן לא קשיר.

טענה: תהי $f=(f_1,\dots,f_n):A\to\mathbb{R}^n$. $A\subseteq\mathbb{R}$. f רציפה $\iff$ f_i רציפה לכל i.

הגדרה: הומיאומורפיזם homeomorphism $f:X\to Y$ נקראת הומיאומורפיזם אם:
f רציפה, הפיכה, f^{-1} רציפה שקול ל- f רציפה, הפיכה, פתוחה/סגורה.

תרגיל: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ ותהי $f:A\to\mathbb{R}$ רציפה. $Gr_f=\{(x,f(x)):x\in A\}\subseteq\mathbb{R}^2$. הוכיחו $Gr_f\cong A$.

פתרון: נגדיר $h:A\to Gr_f$ באופן הבא ונראה שהיא הומיאומורפיזם:

$$h(x)=(x,f(x))$$

$$\tilde h:A\to\mathbb{R}^2 \quad \tilde h(x)=h(x)$$

וזו רציפה לפי איפיון 3, כי כל רכיב שלה רציף. לכן, לפי משפט מן ההרצאה, h תהיה רציפה כי היא מתקבלת מ-$\tilde h$ ע"י צמצום הטווח.

נגדיר את הפונקציה ההופכית ל-h ונראה שהיא רציפה.

$$g:Gr_f\to A\subseteq\mathbb{R}$$
$$g(x,f(x))=x$$

$P_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ רציפה.

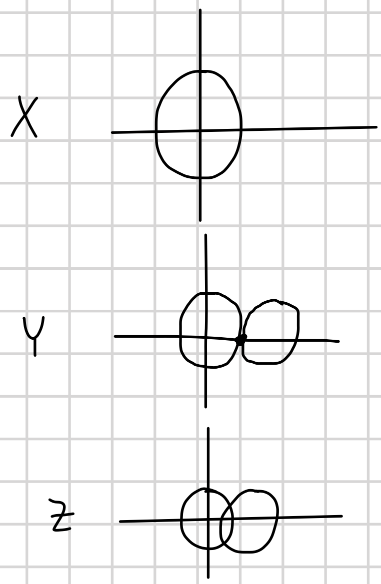
$P_1|_{Gr_f}:Gr_f\to A$

זאת בדיוק g ולכן רציפה.

ראינו שאכן h ו-g רציפות. בדקו בבית שאכן $h^{-1}=g$ ולכן h הומיאומורפיזם ולכן $Gr_f\cong A$.

מסקנה: $A\subseteq\mathbb{R}$ תת מרחב, $f:A\to\mathbb{R}$ רציפה. אז:
1. A קשיר $\iff$ Gr_f קשיר.
2. A ק.מ. $\iff$ Gr_f ק.מ.

? תרגיל הבא נעסוק בשאלה האם הם הומיאומורפים אחד לשני.

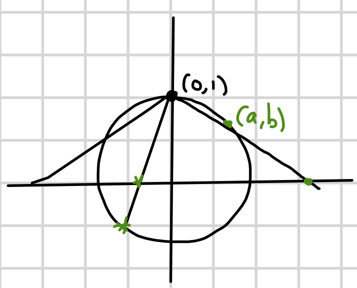


30/5/12

תרגול 8

תרגיל: הוכיחו שלכל $a\in S^1$ מתקיים $S^1-\{a\}\cong\mathbb{R}$.

פתרון: נוכיח $S^1\setminus\{(0,1)\}\cong\mathbb{R}$ (למעשה $S^1\setminus\{a\}\cong S^1\setminus\{b\}$)



אנחנו רוצים למצוא הומיאומורפיזם: $f:S^1\setminus\{(0,1)\}\to\mathbb{R}$

$$f(a,b)=\frac{a}{1-b}$$

ברור שהפונקציה ההופכית היא $g:\mathbb{R}\to S^1\setminus\{(0,1)\}$

$$g(x)=\left(\frac{2x}{x^2+1},\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

קל לוודא ש-g רציפה. ולכן f הומיאומורפיזם. $\leftarrow$ $S^1\setminus\{(0,1)\}\cong\mathbb{R}$. מ.ש.ל

הערה: $S^n\setminus\{a\}\cong\mathbb{R}^n$

משפט: יהי X מ"ט. יהיו $A,B\subseteq X$ תת קשירים מסילתית ונניח ש-$A\cap B\neq\emptyset$. אז $A\cup B$ קשיר מסילתית.

הוכחה: לכל a,b נ"ל מסילה בין a ל-b.

מקרה: $a,b\in A$. קיימת $\gamma:[0,1]\to A$, $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=b$. רוצים $\varphi:[0,1]\to A\cup B$

$$[0,1]\xrightarrow{\gamma}A\xrightarrow{i_A}A\cup B$$

ואז המסילה הדרושה היא $i_A\circ\gamma:[0,1]\to A\cup B$ (מכיוון שפונקציית ההכלה רציפה).

מקרה 2: $a,b\in B$ (באותו אופן) $i_B\circ\gamma:[0,1]\to A\cup B$

מקרה 3: $a\in A\setminus B$, $b\in B\setminus A$. $A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow \exists c\in A\cup B$

$a,c\in A$
$\gamma_1:[0,1]\to A\cup B$
$\gamma_1(0)=a$, $\gamma_1(1)=b$
$\gamma_1(t)=\ldots$

$c,b\in B$
$\gamma_2:[0,1]\to A\cup B$
$\gamma_2(0)=c,\gamma_2(1)=b$

המסילה הדרושה היא השרשור של שתיהן:

$$\gamma=\begin{cases}\gamma_1(2t) & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ \gamma_2(2t-1) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

ואכן $\gamma:[0,1]\to A\cup B$, $\gamma(0)=a, \gamma_1(b)$ מ.ש.ל

תרגיל: הוכיחו שלכל $n>1$: S^n קשירה מסילתית.

פתרון: $B=S^n\setminus\{b\}$, $A=S^n\setminus\{a\}$ ($a\neq b$) $A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow$ לפי משפט: $A\cup B=S^n$ קשיר מסילתית מ.ש.ל

תרגיל: הוכיחו/הפריכו:

א) $[3,\infty)\cong(-\infty,5]$

ב) $S^1\cong S^n$ עבור $n>1$.

ג) האם יש הומאומורפיזם בין שני מרחבים משיעור קודם:

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1\}$$
$$Z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: (x-\tfrac{3}{2})^2+y^2=1\}$$

פתרון:

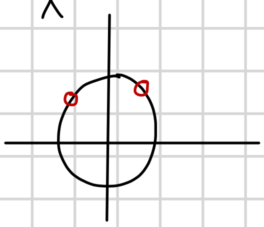
א) נכון, ראינו בכיתה טענה כללית יותר. ובכל זאת נמצא הומאו' מפורש:

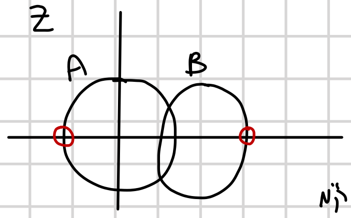
$$f:[3,\infty)\to(-\infty,5]$$
$$f(x)=-x+8$$

רואים ש- $f(x)$ רציפה, חח"ע ועל, וההופכית שלה היא היא עצמה. מ.ש.ל (א)

ב) נניח בשלילה ש- $S^1\cong S^n$ אזי קיים הומיאו' $f:S^1\to S^n$ ולכן לכל $a\in S^1$ גם $\tilde f:S^1\setminus\{a\}\to S^n\setminus\{f(a)\}$ הומיאו'
אבל $S^1\setminus\{a\}\cong\mathbb{R}$, $S^n\setminus\{f(a)\}\cong\mathbb{R}^n$, ומתקיים $\mathbb{R}^n\ncong\mathbb{R}$. סתירה. מ.ש.ל (ב)

ג) נניח בשלילה $X\cong Z$, ולכן קיים הומיאו'
$f:Z\to X$

X


Z


לכן גם הפונקציה הבאה היא הומיאומורפיזם:
$\tilde f: Z\setminus\{(2.5,0),(-1,0)\}\to X\setminus\{f(2.5,0),f(-1,0)\}$

1) $Z\setminus\{(2.5,0),(-1,0)\}$ ק"מ $\Leftarrow$ נשתמש במשפט

שהוכחנו היום: $B\setminus\{(2.5,0)\}$ ק"מ , $A\setminus\{(-1,0)\}$ ק"מ

$A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow A\cup B = Z\setminus\{(\,),(\,)\}$ ק"מ

אך $X\setminus\{f(\,),f(\,)\}$ ק"מ $\Rightarrow X\setminus\{a\}\cong\mathbb{R}$ ולכן קשיר. $X\setminus\{a,b\}\cong\mathbb{R}\setminus\{b\}$

ולכן לא קשיר $(-\infty,b)\cup(b,\infty)\cong\mathbb{R}\setminus\{b\}$ מ.ש.ל)

תרגיל: תהי $f:X\to Y$ רציפה. תהי $A\subseteq X$ תק' כלשהו.

א) $f(cl(A))\subseteq cl(f(A))$

ב) נניח ש- f הומאומורפיזם. הוכיחו $f(cl(A))=cl(f(A))$.

פתרון:

א) $f(cl(A))\subseteq cl(f(A))$

נוכיח תחילה $cl(A)\subseteq f^{-1}(\underbrace{cl(f(A))}_{\text{סגורה}})$
סגורה

מספיק להראות $A\subseteq f^{-1}(cl(f(A)))$
(cl כי הסגורה המינימלית...)

$f(A)\subseteq cl(f(A)) \ /f^{-1}$

$A\subseteq f^{-1}f(A)\subseteq f^{-1}(cl(f(A)))$

$A\subseteq f^{-1}(cl(f(A)))$

$cl(A)\subseteq f^{-1}(cl(f(A)))$

נפעיל f : $f(cl(A))\subseteq ff^{-1}(cl(f(A)))\subseteq cl(f(A))$

ולכן $f(cl(A))\subseteq cl(f(A))$ מ.ש.ל (א)

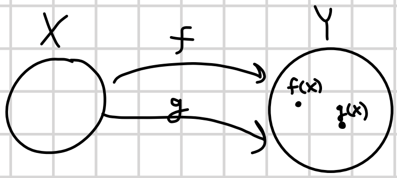
ב) f הומיאו'. הוכיחו $f(cl(A))=cl(f(A))$

פתרון: מספיק להראות $cl(f(A))\subseteq f(cl(A))$

- $A\subseteq cl(A)$ ברור.
- $f(A)\subseteq f(cl(A))$ ברור.
- $cl(A)$ סגורה $\Rightarrow$ $f(cl(A))$ סגורה כי f הומיאו'.
- $cl(f(A))\subseteq f(cl(A))$ (מינימליות של סגור) מ.ש.ל

מסקנה: תהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה ועל. תהי $A\subseteq X$ צפופה. אזי $f(A)$ צפופה ב-Y.
(בפרט, הומיאו' מעביר קבוצה צפופה לקבוצה צפופה)
הוכחה: צ"ל: $cl(f(A))=Y$
הוכחנו $cl(f(A)) \subseteq f(cl(A)) = f(X) = Y$. $Y\subseteq cl(f(A)) \to Y=cl(f(A))$ מ"של
טענה: יהי $f:X\to Y$ הומיאו'. אזי f מעביר מרכיב קשירות של X למרכיב קשירות של Y.
הוכחה: יהי $C\subseteq X$ מרכיב קשירות. $\leftarrow f(C)\subseteq Y$ קשר.
$\leftarrow$ נניח בשלילה $\exists D\subseteq Y$ קשירה: $f(C)\subsetneq D \leftarrow /f^{-1}\cdot$ $C\subsetneq f^{-1}(D)$ בסתירה.
בגלל ש-C מרכיב קשירות. אין קבוצה קשירה שמכילה אותו ממש. מ"של
תרגיל: היזכרו ב- $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ (רציפה)
האם הגרף של f (Gr_f) קשר? קשר מסילתית? כמה מרכיבי קשירות?
הוכחה: ב- $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ יש שני מרכיבי קשירות: $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$
כי כ"א מהם קשיר וקטעים הם תת"מ היחידים הקשירים של $\mathbb{R}$. (לכן גם ל- Gr_f יש שני מרכיבי קשירות בגלל מה שהוכחנו על הומיאו')
מרכיב ק.מ: $\mathbb{R}\setminus\{0\}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה. ולכן מרכיבי הקשירות מתלכדים עם מרכיבי קשירות מסילתית.
תרגיל: תהיינה $f,g:X\to Y$ פונקציות רציפות.
- X,Y מ"ט.
- Y האוסדורף
- $A\subseteq X$ צפופה.
- $f(a)=g(a)$ לכל $a\in A$.

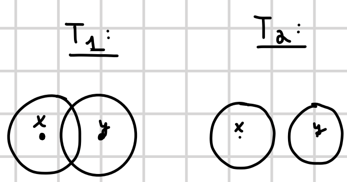
הוכיחו: $f(x)=g(x)$ $\forall x\in X$



פתרון: נניח בשלילה שקיים $x\in X$ שעבורו $f(x)\neq g(x)$.
Y האוסדורף ולכן קיימות שתי קבוצות פתוחות ב-Y:
$$\begin{cases} f(x)\in U \wedge g(x)\in V \\ U\cap V=\emptyset \end{cases}$$
נחזור ל-X: $\underbrace{x\in g^{-1}(V)}_{\text{פתוח}}$, $\underbrace{x\in f^{-1}(U)}_{\text{פתוח}}$
נשים לב ש- $x\in \underbrace{f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)}_{\text{זו קבוצה פתוחה ב-}X}$
ולכן חותכת את A לא טריוויאלית.
כלומר, קיימת $a\in A\cap(f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V))$
$a\in f^{-1}(U)$ $a\in g^{-1}(V)$
$f(a)\in U$ $g(a)\in V$
בגלל שידוע ש: $f(a)=g(a)$
נקבל: $f(a)\in U\cap V\neq\emptyset$ וזאת סתירה.

תרגול 9

הגדרה: נאמר ש- (X,τ) הוא T_1 אם לכל $x\neq y$ קיימות סביבות U של x ו- V של y כך ש- $x\notin V$, $y\in U$



תרגיל: יהי (X,τ) מ"ט. בהסתמך על ההגדרה הנ"ל, הוכיחו שהתנאים שקולים:
א (X,τ) הוא T_1.
ב כל נקודון ב- (X,τ) סגור.
ג כל קבוצה סופית $A\subseteq X$ סגורה ב- (X,τ).
ד $\tau_{cofinite}\subseteq\tau$

פתרון: א⇐ב: יהי $x\in X$ נוכיח ש $cl(\{x\})=\{x\}$. $\{x\}\subseteq cl(\{x\})$ ברור. ולכן ניתן להראות ש- $cl(\{x\})\subseteq\{x\}$.
נניח בשלילה $\exists y\in cl: y\neq x$. אזי, לפי ההגדרה של הסגור, כל סביבה V של y מקיימת $V\cap\{x\}\neq\emptyset \Rightarrow x\in V$.
כלומר, יוצא ש-x שייך לכל סביבה של y בסתירה לכך ש- (X,τ) הוא T_1. מ"של א⇐ב

ב ⇐ ג: אם A סופית אז (אם $A=\emptyset$ זה ברור)
מתקיים: $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ ולכן $A=\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}$. אבל כל יחידון סגור ולכן A סגורה כאיחוד סופי של קבוצות סגורות. מש"ל ב ⇐ ג

ג ⇐ ד: תהי $A\in\tau_{cof}$, צ"ל $A\in\tau$. אם $A=\emptyset$ אז ברור שגם $A\in\tau$. אם $|A^c|<\infty$ ⇐ A^c סגורה ב-(X,τ)
⇐ A פתוחה ב-(X,τ) ולכן $A\in\tau$. מש"ל ג ⇐ ד
ב ⇐ א: נתון: $\tau_{cof}\subseteq\tau$, צ"ל (X,τ) הוא T_2. יהיו $x,y\in X$, $x\neq y$.
$x\in V=X\setminus\{y\}$
$y\in U=X\setminus\{x\}$ פתוחות שכן הן פתוחות ב-τ_{cof} כי משלימן סופי, ומתקיים $y\notin V$, $x\notin U$. מש"ל תרגיל

קומפקטיות והאוסדורף

תזכורת:
① נאמר ש-X מ"ט קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח קיים תת-כיסוי סופי.
② משפט: עבור $A\subseteq X$ ת"מ. A קומפקטי $\iff$ אם $A\subseteq\bigcup O_i$ (O_i פתוחה ב-X.) כיסוי פתוח של A ב-X אז קיים תת-כיסוי סופי $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}O_i$
③ משפט: יהי X מ"ט האוסדורף. אם $A\subseteq X$ קומפקטי אז A סגור.
④ משפט: יהי X קומפקטי. $A\subseteq X$ סגור, אזי A קומפקטי.

תרגיל: מצאו דוגמאות ל-
① קבוצה קומפקטית שאינה סגורה.
② קבוצה קומפקטית שהסגור שלה לא קומפקטי.

פתרון:
① תהי X קב' אינסופית עם הטופולוגיה הקו-סופית.
טענה: לכל $A\subseteq X$, A קומפקטי.
הוכחה: אם $A=\emptyset$ אז ברור. אחרת נתבונן בכיסוי פתוח של A ב-X: $A\subseteq\bigcup U_i$ (U_i פתוחות ב-X.). $A\neq\emptyset$ ולכן $\exists x\in A$.

⇐ קיים i: $x\in U_i$. ברור: $A\subseteq U_i\cup(X\setminus U_i)$ ⇐ $A\setminus U_i\subseteq X\setminus U_i$. אם $A\setminus U_i=\emptyset$ אזי $A\subseteq U_i$ ולכן U_i בעצמו ת"כ סופי.
אם $A\setminus U_i\neq\emptyset$: אבל $A\setminus U_i$ סופית, נסמן $A\setminus U_i=\{x_1,\dots,x_n\}$.
אבל לכל x_j קיים U_{i_j} בכיסוי המקורי כך ש-$x_j\in U_{i_j}$. ולכן ת"כ הסופי הדרוש הוא:
$$A\subseteq U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_n}\cup U_i$$
ולכן A קומפקטי. מש"ל טענה.

אז נותר לייצר את הדוגמא הדרושה, ניקח $A\subseteq X$ כך ש-$A\neq X$, $|A|=\infty$, אזי קבוצות היא אינה סגורה (לפי הגדרת τ_{cof})
וגם קומפקטית [לפי מה שהוכחנו] מ"ל ①

② נמצא קבוצה קומפקטית שהסגור שלה לא קומפקטי.
יהי $X=\{x_i:i\in\mathbb{N}\}$ ונגדיר טופולוגיה: $\tau=\{\emptyset,\{x_1\},\{x_1,x_2\},\{x_1,x_2,x_3\},\dots,X\}$. בדקו שזו אכן טופולוגיה.
הקבוצה $\{x_1\}$ קומפקטית. נראה ש-$cl(\{x_1\})$ אינו קומפקטי. נמצא את $cl(\{x_1\})$: צריכה להיות קבוצה סגורה F כך ש-$x_1\in F$
⇐ $x_1\notin F^c$ ⇐ $F^c=\emptyset$ ⇐ $F=X$. אבל קל לראות ש-X אינו קומפקטי. מש"ל תרגיל

טענה (ת.2): יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $\{F_i\}_{i\in I}$ אוסף כלשהו של ת"מ קומפקטיים. אז $\bigcap_{i\in I}F_i$ קומפקטי.
דוגמא: אם המרחב לא האוסדורף אזי חיתוך של קומפקטיים הוא לא בהכרח קומפקטי.
$X=\mathbb{Z}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$, ונגדיר טופולוגיה:
$$\tau=\{\emptyset,\mathbb{Z}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\},\mathbb{Z}\cup\{\infty\},\mathbb{Z}\cup\{-\infty\},\{-n,-n+1,\dots,n-1,n\}:n\in\mathbb{N}\}$$
בדקו בבית שזוהי אכן טופולוגיה. נמצא שני ת"מ קומפקטיים ב-X שהחיתוך שלהם לא קומפקטי.

$$\left\{\begin{array}{l} A=\mathbb{Z}\cup\{\infty\}\subseteq\bigcup U_i \\ B=\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}\end{array}\right.$$
קומפקטיים כי כל כיסוי מכל קבוצה שהיא עצמה כיסוי
אחד מה-U_i הוא או $\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ או X עצמו.

אבל $A\cap B=\mathbb{Z}$ לא קומפקטי שכן לכיסוי הפתוח $\mathbb{Z}\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{-n,\dots,n\}$ אין תת-כיסוי סופי. מש"ל דוגמא

הערה: כל מרחב מטרי הוא האוסדורף.

דוגמא: למרחב האוסדורף שאינו מטריזבילי.
תהי $p\notin\mathbb{R}$, ויהי $X=\mathbb{R}\cup\{p\}$. תהי $\tau=\{O\subseteq X: p\notin O \vee |O^c|\le\aleph_0\}$
טענה: X האוסדורף.
הוכחה: יהיו $x\neq y\in X$. נפריד למקרים:
① $x\neq p$ ו- $y\neq p$. בפרט $\{x\},\{y\}$ פתוחים ולכן אלה הסביבות שעושות את העבודה.
② בה"כ $y=p$, $x\neq p$. אזי $x\in U=\{x\}$, $p=y\in V=X\setminus\{x\}$ וגם $U\cap V=\emptyset$. ולכן X האוסדורף מש"ל

תזכורת:
① $f:X\to Y$ רציפה. X קומפקטי, Y האוסדורף $\Leftarrow$ f סגורה.
② $f:X\to Y$ רציפה והפיכה. X קומפקטי, Y האוסדורף $\Leftarrow$ f הומיאו.

תרגיל: יהי (X,τ) מ"ט קומפקטי והאוסדורף. הוכיחו:
① אם $\tau\subseteq\tau'$ ו- (X,τ') קומפקטי, אזי $\tau=\tau'$.
② אם $\tau''\subseteq\tau$ ו- (X,τ'') האוסדורף אזי $\tau=\tau''$.
פתרון:
① נתבונן ב- $Id:(X,\tau')\to(X,\tau)$
• Id תמיד הפיכה.
• לפי תזכורת (2) - Id הומיאו $\Rightarrow$ $\tau=\tau'$.
② באותו אופן, רק קחו $Id:(X,\tau)\to(X,\tau'')$. מש"ל

תרגיל: נראה כי $[0,1]$ הוא תת מרחב לא קומפקטי של $(\mathbb{R},\tau_{sorgenfry})$, למרות שהוא כן קומפקטי ב- $\mathbb{R}$.
פתרון:

$\mathbb{R}$	$(\mathbb{R},\tau)$
$([0,1],\sigma)$	$([0,1],\sigma')$

נניח בשלילה ש- $([0,1],\sigma')$ קומפקטי. ראינו $\sigma\subseteq\sigma'$. אזי לפי התרגיל הקודם $\sigma\stackrel{!}{=}\sigma'$. אבל נראה ש- $\sigma\neq\sigma'$:
• $\{1\}$ לא פתוח ב- $([0,1],\sigma)$.
• $\{1\}$ פתוח ב- $([0,1],\sigma')$ כי $\{1\}=[0,1]\cap[1,2)$ מש"ל

13.6.12

$\boxed{\text{תרגול 10}}$

בסיסים

הגדרה: יהי X מ"ט. B משפחה של קבוצות פתוחות ב- X נקראית "בסיס לטופולוגיה של X" אם כל קבוצה פתוחה ב- X היא איחוד של קבוצות פתוחות מ- B.
הגדרה שקולה: B בסיס לטופולוגיה אם:
① B אוסף של קבוצות פתוחות.
② לכל קבוצה פתוחה G ולכל $x\in G$ קיימת $V\in B$ כך ש- $x\in V\subseteq G$.

תרגיל: תהי X קבוצה אינסופית. נגדיר משפחה של קבוצות: $B=\{V\subseteq X: 1000<|V^c|<\infty\}$
הוכיחו ש- B בסיס לטופולוגיה הקו-סופית על X.
פתרון:
① ברור שכל קבוצה ב- B פתוחה ב- (X,τ_{cof}), שכן המשלים שלה סופי.
② תהי $G\in\tau_{cof}$ ויהי $x\in G$ וצריך למצוא $V\in B$: $x\in V\subseteq G$:
$G\in\tau_{cof}\Rightarrow|G^c|<\infty\Rightarrow G$ אינסופית. לכן קיימות ב- G לפחות 1002 נק' שונות.
$\{x,x_1,\dots,x_{1001}\}\subseteq G$
נגדיר $V=G\setminus\{x_1,\dots,x_{1001}\}\Rightarrow V^c=G^c\cup\{x_1,\dots,x_{1001}\}\Rightarrow V\in B$. $x\in V\subseteq G$ והוכחנו הדרוש מש"ל

הערה: ראינו בכיתה שאם $f:X\to Y$ פונקציה, ואם B בסיס ל- Y, אזי f רציפה $\iff$ לכל $V\in B$ מתקיים $f^{-1}(V)$ פתוחה ב- X.
תזכורת: $a\in cl(A)\iff$ לכל U סביבה של a, $U\cap A\neq\emptyset$.
טענה: עכשיו $a\in cl(A)\iff$ לכל סביבה בסיסית $U\in B$ של a, מתקיים $U\cap A\neq\emptyset$.
הוכחה:
$\boxed{\Leftarrow}$ טריוויאלי.
$\boxed{\Rightarrow}$ תהי V סביבה של a וצ"ל ש- $V\cap A\neq\emptyset$. מכיוון ש- B בסיס, קיימת U סביבה בסיסית של a כך ש- $a\in U\subseteq V$. אבל $U\cap A\neq\emptyset$ לפי הנתון ולכן גם $V\cap A\neq\emptyset$. מש"ל

מרחבי מכפלה

יהיו X,Y מ"ט. נתבונן במכפלה $X\times Y$. נגדיר טופולוגיה על $X\times Y$: נגדיר באמצעות בסיס:

$$\mathcal{B}=\{O_1\times O_2 : O_1\in\tau_X, O_2\in\tau_Y\}$$

$\mathcal{B}$ הוא הבסיס לטופולוגיית המכפלה על $X\times Y$. זוהי הטופולוגיה החלשה ביותר שבה ההטלות רציפות.

<u>למה</u>: יהי B_1 בסיס ל-(X,τ). תהי $B_2\subseteq B_1$. אז B_2 בסיס ל-(X,τ) $\iff$ לכל $U\in B_1$ ולכל $x\in U$ קיימת $V\in B_2$ כך ש- $x\in V\subseteq U$.

<u>הוכחה</u>: תרגיל.

<u>טענה</u>: (בסיס למכפלה) יהיו $\{(X_i,\tau_i)\}_{i=1}^n$ ויהיו $\{B_i\}_{i=1}^n$ הבסיסים שלהם בהתאמה. אז אוסף כל הקבוצות מהצורה:

$$\{G_1\times G_2\times\ldots\times G_n : G_i\in B_i \ \forall 1\le i\le n\}$$

לטופולוגיית המכפלה על $X=X_1\times\ldots\times X_n$.

<u>הוכחה</u>: תהי $O_i\in\tau_i$, $U=O_1\times\ldots\times O_n$ ויהי $x=(x_1,\ldots,x_n)\in U$. לכל i, $x_i\in O_i$. B_i בסיס ל-O_i ולכן קיימת $G_i\in B_i$ כך ש- $x_i\in G_i\subseteq U_i$.

$$x=(x_1,\ldots,x_n)\in G_1\times\ldots\times G_n\subseteq O_1\times\ldots\times O_n$$

וסיימנו! מש"ל

<u>טענה</u>: יהיו $(X_1,\tau_1),\ldots,(X_n,\tau_n)$ מ"ט מטריזביליים. אז $X=\prod_{i=1}^n X_i$ מטריזבילי. (עם טופולוגיית המכפלה)

<u>הוכחה</u>: (X_i,τ_i) מטריזביליים ולכן לכל $1\le i\le n$ קיימת מטריקה d_i המשרה את τ_i.

נגדיר מטריקה על X: $\forall x,y\in X$

$$d_{max}(x,y)=\max\{d_i(x_i,y_i)\}$$

עכשיו יש לנו את (X,τ_{max}) כאשר τ_{max} זו הטופולוגיה המושרית מ- d_{max}. מטרה: צ"ל $\tau_\Pi=\tau_{max}$.

<u>טענה 1</u>: ההטלות $p_i:(X,d_{max})\to(X_i,d_i)$ הן רציפות.

<u>הוכחה</u>: נוכיח רציפות בנק' $x\in X$: <u>צ"ל</u>: $d_{max}(x,y)<\delta \rightarrow d_i(p_i(x),p_i(y))<\varepsilon$.

נבחר $\varepsilon=\delta$ ואכן:

$$d_i(p_i(x),p_i(y))=d_i(x_i,y_i)\le\max\{d_i(x_i,y_i)\}=d_{max}(x,y)<\delta=\varepsilon$$

מש"ל

<u>מסקנה 1</u>: $\tau_\Pi\subseteq\tau_{max}$. כל ההטלות p_i רציפות ולכן $\tau_\Pi\subseteq\tau_{max}$, כי טופולוגיית המכפלה זו הטופולוגיה המינימלית בה ההטלות רציפות.

<u>טענה 2</u>:

$$B_{max}(x,\varepsilon)=B_{d_1}(x_1,\varepsilon)\times\ldots\times B_{d_n}(x_n,\varepsilon)$$

<u>הוכחה</u>:

$$y\in B_{max}(x,\varepsilon)\iff d_{max}(x,y)<\varepsilon\iff\forall 1\le i\le n: d_i(x_i,y_i)<\varepsilon\iff\forall 1\le i\le n\ y_i\in B_{d_i}(x_i,\varepsilon)$$

$$\iff y=(y_1,\ldots,y_n)\in B_{d_1}(x_1,\varepsilon)\times\ldots\times B_{d_n}(x_n,\varepsilon)$$

ולכן $\tau_{max}\subseteq\tau_\Pi$. מש"ל

ולכן $\tau_\Pi=\tau_{max}$ ולכן X מטריזבילי.

מכפלה אינסופית

תהי I קבוצה של אינדקסים ויהיו $\{X_i\}_{i\in I}$ אוסף של קבוצות. נגדיר את המכפלה הקרטזית שלהן באופן הבא:

$$\prod_{i\in I}X_i=\{f:I\to\bigcup_{i\in I}X_i : f(i)\in X_i\}$$

<u>ההטלות</u>: $p_j:\prod_{i\in I}X_i\to X_j$

$p_j(f)=f(j)$

<u>טופולוגיית המכפלה</u>: יהיו $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ מ"ט. נגדיר על $\prod_{i\in I}X_i$ את טופולוגיית המכפלה τ_Π אשר בסיסה הוא

$$\mathcal{B}=\left\{\prod_{i\in I}A_i : \forall i\ A_i\in\tau_i : \begin{array}{l}\text{קיימת קבוצה סופית של אינדקסים } F\subseteq I \text{ כך}\\ \text{שלכל } i\notin F: A_i=X_i\end{array}\right\}$$

ראינו בכיתה שבטופולוגיה הנ"ל ההטלות רציפות ופתוחות. אנחנו נוכיח שזו הטופולוגיה החלשה ביותר בה ההטלות רציפות.

<u>טענה</u>: יהיו $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$ מ"ט. τ טופולוגיה על $\prod X_i$. נניח שההטלות $p_i:(\prod X_i,\tau)\to(X_i,\tau_i)$ רציפות. אז $\tau_\Pi\subseteq\tau$

<u>הוכחה</u>: על פי תרגיל שהוכחנו בכיתה, מספיק להראות שכל קבוצה בסיסית של τ_Π שייכת ל- τ.

תהי A קבוצה בסיסית של τ_Π. $A_i\in\tau_i$, $A=\prod A_i$ וקיימת קבוצה סופית של אינדקסים. לכל $i\notin F$: $A_i=X_i$.

$A_i\in\tau_i \Leftarrow p_i^{-1}(A_i)\in\tau$. $p_i^{-1}(A_i)=\prod Y_j$ כך ש- $Y_j=\begin{cases}A_i & i=j\\ X_j & j\ne i\end{cases}$ ו- $A=\bigcap_{i\in F}p_i^{-1}(A_i)$ ופתוחה כחיתוך של פתוחות.

טופולוגיית מנה / מרחבי מנה

במתמטיקה בדידה הגדרנו יחס שקילות $\sim$ על קבוצה X, וקיבלנו $X/\sim = \{$ קבוצת מחלקות השקילות של $\sim$ ב-X $\}$
בחבורות עשינו משהו דומה: בהינתן ת"ח נורמלית $N \trianglelefteq G$, וקיבלנו חבורת מנה G/N.

נרצה להגדיר טופולוגיה על $X/\sim$.

<u>דוגמא מתורת הקבוצות:</u> נגדיר יחס על $\mathbb{Z}$: $x\sim y \iff x=y \pmod 3$
ולכן, $1\sim 4\sim 7$, ו- $\mathbb{Z}/\sim = \{[0],[1],[2]\}$. וכל איבר הוא קבוצה.

בהינתן קבוצת מנה, קיימת פונ' טבעית $\rho: X\to X/\sim$ המוגדרת ע"י $\rho(x)=[x]$.
נשים לב ש-ρ היא על. נקרא ל-ρ $\boxed{\text{הטלת מנה}}$
בדוגמא, $\rho: \mathbb{Z}\to \mathbb{Z}/\sim$: $1\mapsto [1]$, $3\mapsto[0]$.
נגדיר $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_3$: $f(x)=x \bmod 3$

<u>הגדרה</u>: נאמר ש- $f:X\to Y$ מכבדת יחס שקילות על X אם $x\sim y \implies f(x)=f(y)$.
בדוגמא, רואים ש-f מקיימת את יחס השקילות.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathbb{Z}_3 \\ & \mathbb{Z}/\sim \arrow[u, dashed, "\hat{f}"'] \end{tikzcd}$$

בהינתן פונקציה $f:X\to Y$ שמשמרת יחס שקילות $\sim$ על X. ניתן להגדיר פונקציה f בצורה הבאה:
$\hat{f}([x]) = f(x)$
$\hat{f}$ אכן פונקציה בגלל כיבוד יחס השקילות.
$\hat{f}([0]) = f(0)=0$
$\hat{f}([1]) = 1$
$\hat{f}([2]) = f(2) = f(5)$
ברגע שהגדרנו את $\hat{f}$ כך נקבל: $f=\hat{f}\circ\rho$

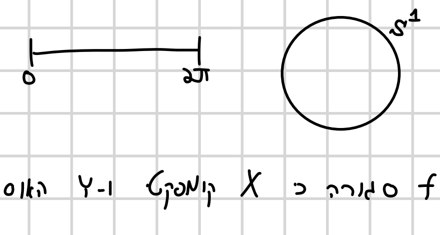
<u>טענה</u>: f על $\iff$ $\hat{f}$ על.
<u>הסבר</u>: $f=\hat{f}\circ\rho$.
<u>טענה</u>: $x\sim y \iff f(x)=f(y) \iff \hat{f}$ חח"ע.
<u>הסבר</u>: $\underset{f(x)}{\hat{f}([x])} = \underset{f(y)}{\hat{f}([y])}$
$\Updownarrow$
$[x]=[y] \iff x\sim y$

<u>מסקנה</u>: אם f על וגם $x=y \iff f(x)=f(y)$, אז f חח"ע ועל.

<u>הגדרה</u>: טופולוגיית המנה: X מ"ט, Y קבוצה, $f:X\to Y$ פונקציה על. אז, הטופולוגיה החזקה ביותר על Y כך ש-f רציפה נקראית טופולוגיית המנה. (חזקה ביותר: מכילה כל טופולוגיה אחרת בה f רציפה)
נסמן ב-$\mathcal{T}$ את טופולוגיית המנה. אז, טופולוגיית המנה מקיימת: $U\in\mathcal{T} \iff f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X.

<u>הגדרה</u>: יהיו X,Y מ"ט, $f:X\to Y$. נאמר ש-f הטלת מנה אם
א. f על.
ב. $U\subseteq Y$ פתוחה $\iff f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X.

<u>דוגמא</u>: $X=[0,2\pi]$, $Y=S^1$



$f: X\to Y$
$f(x) = (\cos x, \sin x)$

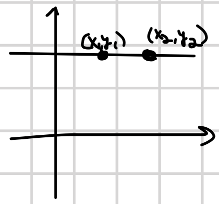
f הטלת מנה, כי f על. רציפה. f סגורה כי X קומפקט ו-Y האוסדורף ו-f רציפה.
לכן f מקיימת את התנאים א ו-ב.

<u>משפט</u>: אם f רציפה. על ופתוחה (או סגורה) אז f הטלת מנה.
<u>דוגמא</u>: ההטלות $P_1: X\times Y\to X$, $P_2: X\times Y\to Y$ הן הטלות מנה: הן רציפות, פתוחות והן על.
<u>טענה</u>: $f:X\to Y$ הטלת מנה אז f חח"ע $\iff f$ הומאומורפיזם.

כעת, נניח ש- $\rho: X\to X/\sim$. ρ על. X מ"ט. ניקח על $X/\sim$ את טופולוגיית המנה. (כלומר. הטופולוגיה החזקה ביותר בה ρ רציפה)

תרגיל: נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \Updownarrow y_1 = y_2$$



הוכיחו ש- $\mathbb{R}^2/_\sim \cong \mathbb{R}$.

טענה שימושית: X,Y מ"ט, $\sim$ יחס שקילות על X, $f: X \to Y$ מכבדת את יחס השקילות. אז:

1. $\hat{f}$ רציפה $\Leftrightarrow$ f רציפה.
2. $\hat{f}$ מנה $\Leftrightarrow$ $f = \hat{f} \circ p$ מנה.

פתרון: עלינו למצוא פונקציה $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ שמכבדת את יחס השקילות.

$$f(x,y) = y$$

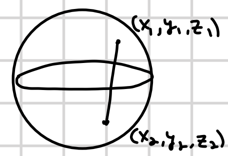
$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2 \Leftrightarrow f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$ $\Leftarrow$ $\hat{f}$ חח"ע.

מה ידוע על f? f היטל על ציר ה-y, ולכן f מנה $\Leftarrow$ $\hat{f}$ מנה. $\hat{f}$ חח"ע ולכן $\hat{f}$ חח"ע + מנה $\Leftarrow$ הומאומורפיזם.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & \mathbb{R} \\
 & \mathbb{R}^2/_\sim \arrow[u, "\hat{f}"']
\end{tikzcd}$$

הראינו $\hat{f}$ מוגדרת + חח"ע, מספיק להראות ש-f מנה כדי לקבל ש-f הומאומורפיזם.

תרגיל: $X = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$



נאמר ש- $(x_1,y_1,z_1) \sim (x_2,y_2,z_2) \Leftrightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$.

מצאו למה הומאומורפי $X/_\sim$.

פתרון: נראה ש- $X/_\sim \cong \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} = D$

נגדיר $f(x,y,z) = (x,y)$

f רציפה: נסתכל על f כ- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, כדי להראות ש-$f$ רציפה מספיק להראות ש- $p_1 \circ f, p_2 \circ f$ רציפות אבל הן בדיוק הטלות ממש מ- $\mathbb{R}^3$ ולכן רציפות. נצמצם ל- $\mathbb{R}^3 \supseteq S^2$ ונקבל ש-f עדיין רציפה.

$$f: S^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$f(S^2) = D$$

ולכן $f: S^2 \to D$ רציפה. כמו כן, $f: S^2 \to D$ רציפה + על. S^2 קומפקטי, ו-Y האוסדורף $\Leftarrow$ f סגורה.

ולכן f מנה. כי $(x_1,y_1,z_1) \sim (x_2,y_2,z_2) \Leftrightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2) \Leftrightarrow f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$

ולכן $\hat{f}$ מוגדרת היטב + חח"ע ולכן f הומאומורפיזם.

זה הכל. בהצלחה לכולם!! ☺

17.7.12

שיעור חזרה

<u>מבחן 2011 מועד מיוחד, שאלה 4</u>

תהי $p\notin\mathbb{R}$, $X=\mathbb{R}\cup\{p\}$, ותהי $\tau=\{O\subseteq X \mid p\notin \mathbb{R} \vee |O^c|<\aleph_0\}$

<u>הוכיחו:</u>

(א) (X,τ) אינו מטריזבילי. הוכח בכיתה.

(ב) קיימת ת"ק צפופה $Y\subseteq X$ כך ש-Y ת"מ מטריזבילי.

<u>פתרון:</u>

(ב) אולי $Y=\mathbb{R}$?

האם $\mathbb{R}$ סגורה? כי אם $\mathbb{R}$ לא סגורה אז $cl(\mathbb{R})=X$.

$\{p\}$ - קבוצה לא פתוחה! $\Leftarrow$ $\mathbb{R}$ אינה סגורה $\Leftarrow$ $cl(\mathbb{R})=X$ $\Leftarrow$ $\mathbb{R}$ צפופה ב-X.

נותר להראות ש-$\mathbb{R}\subseteq X$ מטריזבילי.

$\mathbb{R}$ ת"מ דיסקרטי, שכן אם $O\subseteq\mathbb{R}$ אז $p\notin O$ ולכן O פתוחה (כלומר - כל תת קבוצה של $\mathbb{R}$ פתוחה)
ולכן $\mathbb{R}$ דיסקרטי ולכן מטריזבילי. מש"ל

<u>מבחן 2011 א', שאלה 5</u>

נסמן $\mathbb{R}_l$ - מ"מ ממשיים עם הטופולוגיה הבאה:
קבוצה היא פתוחה אם היא איחוד של קטעים
מהצורה $[a,b)$ (זהו הישר של סורגנפריי)

(א) מצאו סגור, פנים ושפה של

$$A=\underbrace{[2,5]}_{B}\cup\underbrace{\{-\tfrac{3}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}}_{C}$$

(ב) מצאו מרכיבי קשירות של $a=5$ ב-$\mathbb{R}_l$

<u>פתרון:</u> $\tau_{1.1}\subseteq\tau$

(א) <u>סגור:</u> $cl(A)=cl(B)\cup cl(C)$ $\quad A=B\cup C$

$=cl([2,5])\cup cl(\{-\frac{3}{n}\}_{n\in\mathbb{N}})$

$=[2,5]\cup$ ________

כעת, $\{-\frac{3}{n}\}\cup\{0\}$ סגורה ב-$\tau_{1.1}$ ולכן סגורה ב-τ.

$cl(\{-\frac{3}{n}\}_{n\in\mathbb{N}})\subseteq\{-\frac{3}{n}\}\cup\{0\}$, נוכיח $0\notin cl(\{-\frac{3}{n}\})$ שכן $\{-\frac{3}{n}\}\cap[0,1)=\emptyset$

$cl(\{-\frac{3}{n}\})=\{-\frac{3}{n}\}$

ולכן סה"כ A סגורה ולכן $cl(A)=A$.

<u>פנים:</u> $A=[2,5]\cup\{-\frac{3}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. ניחוש: $int(A)=[2,5)$. נניח בשלילה שקיימת D פתוחה:

$[2,5)\subseteq D\subseteq[2,5]\cup\{-\frac{3}{n}\}$

(1) אם $5\in D$ אז קיים $\varepsilon>0$ כך ש-$[5,5+\varepsilon)\subseteq D$. ולכן $5+\frac{\varepsilon}{2}\in D$, אבל זה לא אפשרי. סתירה.

(2) אם קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו $-\frac{3}{n}\in D$. האם זה ייתכן?
לא. למה? כי אם $-\frac{3}{n}\in D$, D פתוחה, כי אז קיים $1>\varepsilon>0$ אי-רציונלי כך ש: $[-\frac{3}{n},-\frac{3}{n}+\varepsilon)$
אבל אז $-\frac{3}{n}+\frac{\varepsilon}{2}\in D$ ולכן זו סתירה (כי $D\subseteq A$).

לכן סה"כ $int(A)=[2,5)$

<u>שפה:</u> $\partial(A)=cl(A)\setminus int(A)$

$=([2,5]\cup\{-\frac{3}{n}\})\setminus[2,5)=\{5\}\cup\{-\frac{3}{n}\}$

(ב) מרכיב קשירות של $a=5$.

<u>טענה:</u> לכל $F\subseteq\mathbb{R}_l$, אם $|F|>1$ אז F לא קשיר.

נניח ש $a<b$. הקבוצות $(-\infty,b),[b,\infty)$ פתוחות ולכן

$((-\infty,b)\cap F)\cup([b,\infty)\cap F)=F$

ולכן יש פירוק לא טריוויאלי ולכן F לא קשיר. מכאן, מרכיב הקשירות של $a=5$ הוא 5.

מבחן 2010 ג׳, שאלה 4

יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף אינסופי של מ"ט שכל אחד מהם בן יותר מנק׳ אחת. הראו ש- $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ אינו דיסקרטי.

פתרון: נניח בשלילה ש- $\prod X_\alpha$ כן דיסקרטי. אזי, כל תת-קבוצה פתוחה.

בפרט: $x_\alpha\in X_\alpha$, $A=\prod_{\alpha\in I}\{x_\alpha\}$. אבל זו צריכה להכיל קבוצה בסיסית.

מה שאומר שקיים $\alpha\in I$ עבורו $X_\alpha\subseteq\{x_\alpha\}$, אך זה לא ייתכן שכן X_α בן יותר מנק׳ אחת.

$\Leftarrow$ $\prod X_\alpha$ אינו דיסקרטי! מש"ל

מבחן 2009 ג׳, שאלה 3

יהי X מ"ט כלשהו. Y מ"ט האוסדורף. $f,g:X\to Y$ רציפות. הראו שהפונקציה $A=\{x\in X: f(x)=g(x)\}$ סגורה ב- X.

פתרון: תזכורת: בש.ב. הוכחתם שבתנאים הללו

$$\Delta=\{(y,y):y\in Y\}\subseteq Y\times Y$$

סגור בטופולוגיית המכפלה.

נגדיר פונקציית עזר: $h:X\to Y\times Y$, $h(x)=(f(x),g(x))$

h רציפה (לפי קריטריון רציפות למכפלה)

$$h^{-1}(\Delta)=\{x\in X: h(x)\in\Delta\}=\{x\in X: f(x)=g(x)\}=A$$

$\Leftarrow$ A תמונה הפוכה תחת פונ׳ רציפה של קבוצה סגורה, ולכן A סגורה. מש"ל.

מבחן 2008: האם קיים הומיאומורפיזם:

(א) $\{\frac{n+2}{n+1}:n\in\mathbb{N}\}$, $\{\frac{n^2-5}{n+7}:n\in\mathbb{N}\}$ (ד) $B_d((0,0),5)$, $B_d[(0,0),5]$.

(ב) 5 8 , 1 9.

(ג) $\mathbb{R},\mathbb{R}^2$

פתרון:

(א) קל לראות ששני המרחבים דיסקרטיים. הם מאותה עוצמה $\aleph_0$ ולכן קיימת ביניהם פונק׳ חח"ע ועל. פונקציה (וגם ההפכית שלה) רציפות בגלל הדיסקרטיות ולכן הומיאומורפיזם.

(ב) אם שני מרחבים הומיאומורפיים, אזי מרכיב קשירות נשלח עובר למרכיב קשירות.
במקרה שלנו זה יאמר ש- $1\cong 8$ או $9\cong 8$.
אך שניהם לא אפשריים.

(1) 1 ו 8: ל-8 יש נק׳ אחת שפוגעת בקשירות ול-1 יש אינסוף נק׳ שפוגעות בקשירות.

(2) זהה לקודם.

(ג) לא הומיאומורפים, שכן הוצאת נק׳ אחת פוגעת בקשירות של $\mathbb{R}$ אך לא של $\mathbb{R}^2$.

(ד) $B_d((0,0),5)$ לא קומפקטי (כי לא סגור), ו- $B_d[(0,0),5]$ כן קומפקטי (היינה בורל)
ולכן אינם הומיאומורפים כי הומיאו׳ מעביר קומפקטי לקומפקטי.

מבחן 2004, א

על $\mathbb{R}$ נגדיר את יחס השקילות הבא:

$$x\sim y \iff \sin x=\sin y$$

הראו: $\mathbb{R}/\sim\ \cong[0,1]$

פתרון: נוכיח $\mathbb{R}/\sim\ \cong[-1,1]$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & {[-1,1]} \\ & \mathbb{R}/\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

f מקיימת:

$f(x)=f(y) \iff x\sim y$.

ולכן $\hat f$ מוגדרת וחח"ע.

f רציפה ולכן $\hat f$ רציפה.

f על ולכן $\hat f$ על.

כעת: $\rho:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\sim$, $\rho|_{[0,2\pi]}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}/\sim$ $\Leftarrow$ ρ רציפה ועל $\Leftarrow$ $\rho|_{[0,2\pi]}$ רציפה. $[0,2\pi]$ קומפקטי ולכן $\rho([0,2\pi])$
אבל ρ על ולכן מכאן נקבל ש- $\mathbb{R}/\sim$ קומפקטי, ולכן $[-1,1]$ האוסדורף ולכן $\hat f$ סגורה (ממשפט)
ולכן $\hat f$ הומיאומורפיזם. מטרנזיטיביות של הומיאו׳ נקבל $\mathbb{R}/\sim\ \cong[0,1]$. מש"ל

מבחן 2011 מועד ב׳, שאלה 4

יהי X מרחב T_3. הראו שלכל $x\neq y$ יש קבוצות פתוחות U,V כך ש- $x\in U, y\in V$, $\bar{U}\cap\bar{V}=\emptyset$.

__פתרון:__

__למה:__ במרחב X שהוא T_3 מתקיים: יהי $x\in X$ ו-W פתוחה כך ש- $w\in X$.
אזי קיימת U פתוחה כך ש- $x\in U\subseteq\bar{U}\subseteq W$.

__הוכחה:__ $x\in W$ פתוחה. $x\notin W^c$ סגורה ולכן לפי T_3 קיימות A_1,A_2 פתוחות כך ש:

$$\begin{cases} x\in A_1,\ W^c\subseteq A_2 \\ A_1\cap A_2=\emptyset \end{cases}$$

$x\in A_1$, ומתקיים $A_1\subseteq A_2^c\subseteq V \Leftarrow A_1\subseteq cl(A_1)\subseteq A_2\subseteq W \Leftarrow x\in A_1\subseteq cl(A_1)\subseteq W$. מ״ש

T_3 הוא דבר האוסדורף (T_2) לכן עבור $x\neq y$ קיימות W_1,W_2:

$$\begin{cases} x\in W_1 \wedge y\in W_2 \\ W_1\cap W_2=\emptyset \end{cases}$$

אבל לפי הטענה שהוכחנו, קיימות U_1,U_2:

$$x\in U_1\subseteq cl(U_1)\subseteq W_1$$
$$y\in U_2\subseteq cl(U_2)\subseteq W_2$$

ולכן ההפרדה הדרושה תהיה:

U_1,U_2 שכן $\bar{U}_1\cap\bar{U}_2=\emptyset$.