אינפי 4 תרגול 12

24 ביוני 2015

נפתור את מבחן מועד ב' משנת תשע"ב.

במבחן 6 שאלות, מתוכן יש לפתור 5 שאלות. כל שאלה שווה 21 נקודות.

1. תהי $M \subset \mathbb{R}^3$ קבוצה המוגדרת ע"י:

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 3, x - 2y + z = 0\}$$

א. האם זוהי יריעה? אם כן, מהו מימדה?

<u>פתרון:</u>

הדרגה של היעקוביאן צריכה להיות מקסימלית, כלומר דרגתה של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 4x^3 & 4y^3 & 4z^3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

צריכה להיות 2 בכל נקודה ב$-M$.

מתי הדרגה אינה 2? השורות צריכות להיות תלויות ליניארית, כלומר:

$$(4x^3, 4y^3, 4z^3) = \alpha \cdot (1, -2, 1)$$

כלומר: $4x^3 = 4z^3 = \alpha$ וכן $4y^3 = -2\alpha$, כלומר נקודה מהצורה:

$$(x, \sqrt[3]{-2}x, x)$$

האם יש נקודה כזו ב$-M$?

אם נקודה כזו מקיימת את המשוואה השנייה אז:

$$x - 2\sqrt[3]{-2}x + x = 0$$

ולכן $x = 0$, אך הנקודה $(0,0,0)$ לא מקיימת את המשוואה השנייה.

לכן אין נקודות כאלו על M ולכן דרגת המטריצה מקסימלית לכל נקודה ב$-M$. לכן M יריעה.

את M מגדירות שתי משוואות (בת"ל) בתוך מרחב תלת מימדי ולכן מימדה הוא $3-2 = 1$.

אפשר להבין זאת גם מצורתה של M - חיתוך של "ספירה פחוסה" ושל מישור נותן לנו "מעגל פחוס" שמימדו 1.

ב. מצאו מרחב משיק ל$-M$ בנקודה $(1,1,1)$.

<u>פתרון:</u>

המרחב המשיק הוא מרחב האיפוס של המטריצה שלנו, כלומר אנחנו צריכים לחשב את:

$$Null\begin{pmatrix} 4x^3 & 4y^3 & 4z^3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר $(x,y,z) = (1,1,1)$. אם כן:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 4x + 4y + 4z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

ונקבל $x=-z, y=0$ ולכן המרחב המשיק הוא:

$$T_{(1,1,1)}(M) = \{(x,0,-x) : x \in \mathbb{R}\} = span\{(1,0,-1)\}$$

2. א. עבור אילו ערכים של הפרמטרים n, a מתקיים:

$$\int_{\Gamma} (x^2y^n + ax)(ydx + xdy) = 0$$

לכל עקומה סגורה $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$?

<u>פתרון:</u>

משפט: תבנית ω היא מדויקת אם ורק אם האינטגרל:

$$\int_{\Gamma} \omega d\underline{x}$$

לא תלוי בעקומה Γ.

במקרה שלנו, התבנית היא: $\omega(x,y) = (x^2y^{n+1} + axy, x^3y^n + ax^2)$.

אנו רוצים לבדוק מתי התבנית מדוייקת, כלומר להראות שקיימת $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המקיימת:

$$df = \omega$$

כלומר, עלינו לפתור את המשוואות:

$$\begin{cases} f_x = x^2y^{n+1} + axy \\ f_y = x^3y^n + ax^2 \end{cases}$$

קצת מד"ח לא הרגו אף אחד. נבצע אינטגרציה לפי x במשוואה הראשונה ולפי y במשוואה השנייה ונקבל:

$$\begin{cases} f = \frac{x^3y^{n+1}}{3} + \frac{ax^2y}{2} + g(y) \\ f = \frac{x^3y^{n+1}}{n+1} + ax^2y + h(x) \end{cases}$$

כאשר מבצעים אינטגרציה לפי x יש להוסיף פונקציה כללית של y, שמבחינת x היא קבוע, וכן להיפך.

אם כן:

$$\frac{x^3y^{n+1}}{3}+\frac{ax^2y}{2}+g(y)=\frac{x^3y^{n+1}}{n+1}+ax^2y+h(x)$$

הפונקציה g היא פונקציה של y בלבד. באגף ימין אין פונקציה של y בלבד ולכן $g=0$.

באופן דומה, הפונקציה h היא פונקציה של x בלבד. באגף שמאל אין פונקציה של x בלבד ולכן $h=0$.

נותרנו עם:

$$\frac{x^3y^{n+1}}{3}+\frac{ax^2y}{2}=\frac{x^3y^{n+1}}{n+1}+ax^2y$$

מכאן, $\frac{ax^2y}{2}=ax^2y$ וגם $\frac{x^3y^{n+1}}{n+1}=\frac{x^3y^{n+1}}{3}$ ובסה"כ הערכים המתאימים הם:

$$a=0, n=2$$

ב. סעיף ב' לא נמצא בחומר הקורס השנה. ירד במיקוד.

3. בעזרת משפט גרין חשבו:

$$\int_{\Gamma} x^2(y+1)dx-xy^2dy$$

כאשר $\Gamma=\{(x,y):x^2+y^2=1, y\geq 0\}$ נגד כיוון השעון.

<u>פתרון:</u>

המסילה שלנו לא סגורה, וכדי שנוכל להשתמש במשפט גרין יש לסגור אותה.

המסילה שלנו היא החצי העליון של מעגל היחידה. אפשר לסגור אותה בכמה דרכים, הפשוטה ביותר היא הקו הישר בין הנקודות $(-1,0)$ ו־$(1,0)$.

נסמן את הקו ב$-C$ ואת המסילה הסגורה שהתקבלה ב$-\tilde{\Gamma}$. נקבל:

$$\int\limits_{\tilde{\Gamma}} = \int\limits_{\Gamma} + \int\limits_{C}$$

פרמטריזציה של C היא:

$$\gamma(t) = (t,0)$$

כאשר $t \in [-1,1]$. התבנית היא: $\omega(x,y) = (P,Q) = (x^2(y+1), -xy^2)$, ולכן:

$$\omega(\gamma(t)) = (t^2,0)$$

כמו כן $\gamma'(t) = (1,0)$ ולכן:

$$\int\limits_{C} = \int\limits_{-1}^{1} (t^2,0)\cdot(1,0)dt = \frac{t^3}{3}|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

כעת, לפי משפט גרין:

$$\int\limits_{\tilde{\Gamma}} = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_{D} (-y^2 - x^2)dxdy$$

כאשר התחום D הוא החצי העליון של עיגול היחידה. נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

כאשר $0 \le r \le 1$,$0 \le \theta \le \pi$. היעקוביאן הוא r, $x^2 + y^2 = r^2$ ולכן:

$$\iint\limits_{D} (-y^2 - x^2)dxdy = \int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{1} -r^2 \cdot rdrd\theta = \pi\frac{-r^4}{4}|_{0}^{1} = -\frac{\pi}{4}$$

ובסך הכל:

$$-\frac{\pi}{4} = \int_{\Gamma} + \int_{C}$$

והאינטגרל שווה ל-$-\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$.

4. בעזרת משפט גאוס מצאו את נפח הגוף החסום ע"י $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $y = 2$.

<u>פתרון:</u>

משפט גאוס, הלא הוא משפט הדיברגנץ, אומר:

$$\iiint\limits_{G} divF dxdydz = \iint\limits_{S} F \cdot \vec{n} dS$$

כאשר S הוא משטח שהוא שפת הגוף G.

נפח של גוף מחשבים בעזרת:

$$\iiint\limits_{G} dxdydz$$

ולכן נחפש שדה וקטורי שהדיברגנץ שלו הוא 1 והוא יחסית פשוט, כדי שיהיה נוח לעבוד איתו.

המועמד המוביל הוא כמובן השדה:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z)$$

שפת הגוף שלנו, שהוא חרוט, היא מעטפת החרוט ובסיסו. נחשב את האינטגרל על כל אחד מהם בנפרד ונסכום את האינטגרלים.

פרמטריזציה של המעטפת היא:

$$\phi(x, z) = (x, \sqrt{x^2 + z^2}, z)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_x = (1, \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, 0), \phi_z = (0, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}, 1)$$

ולכן:

$$\phi_x \times \phi_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} & 0 \\ 0 & \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} & 1 \end{vmatrix} = (\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, -1, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}})$$

כמו כן: $F(\phi(x,z)) = \frac{1}{3}(x, \sqrt{x^2+z^2}, z)$. לכן:

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iint_D (\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, -1, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}) \cdot \frac{1}{3}(x, \sqrt{x^2+z^2}, z) dxdz = 0$$

אינטואיטיבית, למה האינטגרל מתאפס? המשטח שלנו הוא חרוט. אם נסתכל על "חתך רוחב" בחרוט, נקבל מעגל.

מכיוון שהפונקציה שלנו היא פשוט שליש של פונקציית הזהות, השטף בנקודה מסויימת על המעגל הוא בדיוק ה"היפך" מהשטף בנקודה האנטיפודית לנקודה הזו.

כעת, נחשב גם את האינטגרל על הבסיס.

פרמרטזיציה של הבסיס היא:

$$\phi(x,z) = (x, 2, z)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_x = (1,0,0), \phi_z = (0,0,1)$$

ולכן:

$$\phi_x \times \phi_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,0)$$

כמו כן, $F(x,y,z)=\frac{1}{3}(x,2,z)$ ולכן:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS=\iint\limits_D \frac{1}{3}(x,2,z)\cdot(0,-1,0)dxdz=-\frac{2}{3}\iint\limits_D dxdz$$

האינטגרל מחשב את שטחו של התחום D. התחום D הוא עיגול שרדיוסו 2 ולכן:

$$=-\frac{2}{3}\cdot 4\pi=-\frac{8\pi}{3}$$

נפח הוא תמיד חיובי, ולכן בסך הכל:

$$V=\frac{8\pi}{3}$$

5. בעזרת משפט סטוקס חשבו:

$$\int\limits_\Gamma ydx+zdy+xdz$$

כאשר Γ היא חיתוך של הספירה $x^2+y^2+z^2=9$ והמישור $x+y+z=0$ נגד כיוון השעון.

<u>פתרון:</u>

משפט סטוקס אומר:

$$\int\limits_C F\cdot d\vec{r}=\iint\limits_S(\nabla\times F)\cdot\vec{n}dS$$

כאשר C שפת המשטח S.

במקרה שלנו, $F=(P,Q,R)=(y,z,x)$ ולכן:

$$\nabla\times F=(0-1,0-1,0-1)=(-1,-1,-1)$$

נורמל יחידה למשטח שלנו הוא $(1,1,1)$ ולכן:

$$\int_{\Gamma} ydx + zdy + xdz = \iint_{S} (1,1,1)\cdot(-1,-1,-1)dS = -3\iint_{S} dS$$

האינטגרל מחשב את שטחו של המשטח S.

המישור שחותך את הספירה עובר בראשית הצירים, שהיא מרכזה של הספירה, ולכן Γ היא מעגל גדול.

S, אם כן, הוא עיגול שרדיוסו 3 ולפיכך שטחו 9π. לכן:

$$\int_{\Gamma} ydx + zdy + xdz = -3\cdot 9\pi = -27\pi$$

6. עבור פונקציה דיפרנציאבילית $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ותבנית ω הגדירו $\varphi * \omega$.

כאשר ω פונקציה ליניארית על $\mathbb{R}^n$ הוכיחו את הנוסחה:

$$\varphi * (d\omega) = d(\varphi * \omega)$$

<u>פתרון:</u>

זו השאלה התיאורטית.

ההעתקה $\varphi*$, שנקראת גם $pullback$, מוגדרת ע"י:

$$\varphi * \omega\,(t; v_1, v_2, \ldots, v_k) = \omega(\varphi(t); \varphi'(t)v_1, \ldots, \varphi'(t)v_k)$$

כאשר ω היא k–תבנית, $t; v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m, \varphi(t); \varphi'(t)v_1, \ldots, \varphi'(t)v_k \in \mathbb{R}^n$.

כאשר ω פונקציה ליניארית, $\omega(x) = \sum \pi_i(x)dx_i$. לפי הגדרת $\varphi*$:

$$\varphi * (\pi_i) = \pi_i(\varphi) = \varphi_i(t)$$

ולכן $d(\varphi * \omega) = d\varphi_i(t)$.

להוכחה מלאה התסכלו בהרצאות.