תורת החבורות (88218)
מבחן מסכם, מועד ב'
סמסטר א' תשע"ח

מרצה: מיכאל משה שיין.

יש לענות על כל השאלות ולתת נימוקים מלאים לכל התשובות. סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתיחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד.

משך הבחינה: שלוש שעות. כל חומר עזר אסור. בהצלחה!

1. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(א) תהי G חבורה. היא סופית אם ורק אם יש לה מספר סופי של תת־חבורות.

(ב) תהי G חבורה. היא סופית אם ורק אם $o(g)$ סופי לכל $g \in G$.

2. (א) תהי G חבורה סופית מסדר אי־זוגי, ויהי $g \in G$ איבר לא־טריוויאלי. הוכח שהאיברים g ו־g^{-1} אינם צמודים.

(ב) תהי G חבורה. תת־חבורה $H \leq G$ נקראת אופיינית במלואה אם $\varphi(H) \leq H$ לכל הומומורפיזם $\varphi : G \to G$. הוכח שתת־חבורת הקומוטטורים G' הינה אופיינית במלואה ב־G.

(ג) הוכח כי $Z(G)$ לא בהכרח אופיינית במלואה ב־G.

רמז: התבונן במקרה $G = \mathbb{Z}_2 \times S_3$.

3. יהי $p > 2$ מספר ראשוני.

(א) הוכח שכל תת־חבורת p־סילוב של S_{2p} הינה אבלית.

(ב) מצא קבוצת יוצרים מינימלית של תת־חבורת p־סילוב אחת של S_{2p}.

(ג) יהי $n \geq 1$ מספר טבעי. הוכח שלכל חבורה מסדר p^n יש תת־חבורה נורמלית מסדר p^{n-1}.

4. (א) תהי G חבורה ותהיינה $H, K \leq G$ שתי תת־חבורות. יהי $g \in HK$. הוכח שלקבוצה של הזוגות

$$\{(h,k) \in H \times K : g = hk\}$$

ולחיתוך $H \cap K$ יש אותה עוצמה.

(ב) תהי G חבורה סופית ותהי $K \trianglelefteq G$. תת־חבורה $H \leq G$ נקראת תת־חבורת הול [1] אם $([G:H], |H|) = 1$. הוכח שאם $H \leq G$ תת־חבורת הול, אזי $H \cap K \leq K$ וגם $HK/K \leq G/K$ הן תת־חבורות הול.

5. (א) עד כדי איזומורפיזם, כמה חבורות אבליות יש מסדר 144? הצג רשימות לפי גורמים אינווריאנטיים ולפי מחלקים אלמנטריים. לכל חבורה ברשימה הראשונה הראה את החבורה האיזומורפית אליה ברשימה השניה.

(ב) תהי G חבורה אבלית סופית. נניח שתת־חבורות p־סילוב של G ציקליות לכל הראשוניים p. הוכח כי G ציקלית.

[1] על שם המתמטיקאי האנגלי פיליפ הול שחקר אותן