תרגיל בית 6 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ח

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. הגישו את התרגיל בתרגול שלכם בשבוע המתחיל בתאריך 31.12.2017.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. תהי G חבורה ותהי $H \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. אם ${}^{G}\!/_{H}$ ציקלית ולא טריוויאלית, אז G אבלית.

ב. אם ${}^{G}\!/_{H}$ סופית ולא טריוויאלית, אז G סופית.

שאלה 2. מצאו את הסימן של התמורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n & 1 \end{pmatrix} \in S_{2n}$$

שאלות להגשה

פתרו לפחות **שלוש** שאלות מתוך השאלות הבאות. מומלץ לנסות ולהגיש תשובות נוספות, כי גם אם לא מקבלים עליהן ניקוד, עדין מקבלים עליהן משוב.

שאלה 3. תהי G חבורה ותהינה H, K תת־חבורות נורמליות המקיימות $H \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי G איזומורפית לתת־חבורה של ${}^{G}\!/_{K} \times {}^{G}\!/_{H}$.

שאלה 4. בתרגיל הזה נראה שוב שאי אפשר לומר ששתי תמורות הן "צמודות סתם" מבלי לומר באיזו חבורה עובדים.

א. מצאו את מחלקת הצמידות של $(132) \in A_4$.

ב. תנו דוגמה לשתי תמורות שאינן צמודות ב־A_4, אבל כן צמודות ב־S_4. הוכיחו שהן גם צמודות ב־A_5. רמז: הביטו מעלה.

ג. הוכיחו שאם יש זוג תמורות שאינן צמודות ב־A_n, אך כן צמודות ב־S_n, אז הן גם צמודות ב־A_{n+2}.

שאלה 5. נראה שאיזומורפיות בתת־חבורות נורמליות ובחבורות המנה ביחד עדין לא גורר איזומורפיות בחבורה "למעלה".

א. תנו דוגמה לחבורה אבלית G_1, לתת־חבורה שלה $H_1 \lhd G_1$, לחבורה לא אבלית G_2 ולתת־חבורה שלה $H_2 \lhd G_2$, כך ש-$H_1 \cong H_2$ וגם ${}^{G_1}/_{H_1} \cong {}^{G_2}/_{H_2}$. רמז: אפשר לבחור את G_1, G_2 להיות מסדר 6 או 8.

ב. כמו בסעיף הקודם, אבל הפעם נדרוש ששתי החבורות G_1, G_2 הן אבליות ולא איזומורפיות. רמז: אפשר לבחור חבורות מסדר p^3.

שאלה 6. נתבונן בחבורה $G = {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. יהיו $x_1, x_2 \in G$. הראו שתת־החבורה $H = \langle x_1, x_2 \rangle$ היא ציקלית וסופית. רמז: הציגו את x_1, x_2 כמחלקות שמאליות, ואז נסו להבין כיצד נראה איבר כלשהו ב-H.

ג. מצאו קבוצת איברים $S \subseteq G$ כך שתת־החבורה $K = \langle S \rangle$ היא אינסופית וגם $K \neq G$. רמז: למה S חייבת להיות אינסופית?

שאלה 7.

א. מצאו כמה הומומורפיזמים $f: \mathbb{Z}_2 \to S_6$ קיימים. רמז: שאלה 3 בתרגיל בית 4.

ב. מצאו כמה הומומורפיזמים $f: \mathbb{Z}_{25} \to A_8$ קיימים, ומהו $\ker f$ של כל אחד מהם.

שאלה 8. תהי G חבורה שבה לכל $x, y \in G$ מתקיים $(xy)^{2018} = x^{2018}y^{2018}$. נסמן שלוש תת־קבוצות

$$\begin{aligned} A &= \left\{ g^{2018} \,\middle|\, g \in G \right\} \\ B &= \left\{ g^{2017} \,\middle|\, g \in G \right\} \\ C &= \left\{ g \,\middle|\, g \in G, g^{2018} = e \right\} \end{aligned}$$

א. הוכיחו $A, B, C \lhd G$. צריך להוכיח שהן תת־חבורות, וגם שהן נורמליות. רמז: כדאי לא לעבוד קשה ולהעזר בהומומורפיזמים.

ב. הוכיחו שכל איברי A מתחלפים עם כל איברי B. באופן שקול, הוכיחו שלכל $x, y \in G$ מתקיים $x^{2018}y^{2017} = y^{2017}x^{2018}$.

ג. הוכיחו שלכל $g, h \in G$ מתקיים $[g,h]^{2018\cdot 2017} = e$ כאשר $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. יהי p ראשוני. נזכיר כי חבורה נקראת חבורת-p אם הסדר של כל איבר הוא חזקה של p. כמו כן ראינו שלחבורת-p סופית יש מרכז לא טריוויאלי. מצאו חבורת-p עם מרכז טריוויאלי.

הדרכה אפשרית (אם אתם מוצאים חבורות אחרות נשמח לשמוע): התבוננו על קבוצת המטריצות האינסופיות מעל $\mathbb{Z}_p$ מהצורה

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_\infty \end{pmatrix}$$

כאשר I_∞ היא מטריצת יחידה אינסופית, 0 היא מטריצת אפס בגודל מתאים והמטריצה $A \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ היא משולשית עליונה (סופית, עבור n טבעי כלשהו) עם אחדות על האלכסון.

הסבירו למה כפל מטריצות עדין מוגדר כאן (זה חשוב שבכל שורה ובכל עמודה יש מספר סופי של איברים לא אפסיים), והסיקו שמתקבלת חבורה. הוכיחו שהסדר של כל איבר הוא חזקה של p וכדי להראות שהמרכז טריוויאלי העזרו בזהויות הבאות על מטריצות בלוקים סופיות:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & M \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

שאלה 10. תהי G חבורה. נקרא לתת־חבורה של G נאותה אם היא מוכלת ממש ב-G.

א. הוכיחו ש-G אינה איחוד של שתי תת־חבורות נאותות. כלומר שאם $G = H \cup K$, אז $G = H$ או $G = K$.

ב. תנו דוגמה לחבורה מסדר 4 שהיא איחוד של שלוש תת־חבורות נאותות שלה.

ג. מעתה נניח כי G היא איחוד של שלוש תת־חבורות נאותות, $G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$. הוכיחו כי חיתוך של כל שתיים מתת־החבורות שווה לחיתוך שלושתן $H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

ד. הוכיחו כי לכל $x \in G$ מתקיים $x^2 \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

ה. הסיקו כי $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \lhd G$.

ו. הוכיחו שהאינדקס של החיתוך ב-G הוא 4. הראו שחבורת המנה ביחס לחיתוך איזומורפית לדוגמה שנתתם בסעיף השני.

בהצלחה!