03.08.14 תרגול בס"ד

hilla.behar2@gmail.com

תרגיל: נרצה לפתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{pmatrix} 1.01 & 0.99 \\ 0.99 & 1.01 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 0.03 & 0.01 \\ 0.01 & 0.03 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

לשתי המערכות אותו פתרון $x = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמערכות:

א. מצא פתרון מקורב ע"י דירוג עם דיוק של 3 ספרות משמעותיות ועיגול. (אחרי כל צעד צריך לדייק עם 3 ספרות).

ב. העריכו את היחס בין השגיאה היחסית של הפתרון, לשגיאה היחסית של השארית ע"י שימוש בנוסחת היחסים:

$$\delta\hat{b} \cdot \frac{1}{\mathrm{cond}(A)} \le \delta\hat{x} \le \delta\hat{b} \cdot \mathrm{cond}(A)$$

(b מקורב)

(לפעמים מדברים על $\hat{b}$ $\hat{x}$ מה יוצא.)

הסבר את הפתרון ביחס לפתרון סעיף א'.

פתרון: (נעשה pivoting חלקי)

א.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1.01 & 0.99 & 2 \\ 0.99 & 1.01 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - \frac{0.99}{1.01}R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1.01 & 0.99 & 2 \\ 0 & \underset{3.98\cdot 10^{-2}}{\overset{\parallel}{0.0398}} & -3.96 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = -99.4 \\ x_1 = 99 \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} 99 \\ -99.4 \end{pmatrix}$$

המשך

עבור המערכת השניה:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.03 & 0.01 & 2 \\ 0.01 & 0.03 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{3}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 0.03 & 0.01 & 2 \\ 0 & 0.0266 & -2.66 \end{array}\right)$$

$$x_2 = -100 \Rightarrow x_1 = 100$$

$$x = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \end{pmatrix}$$

ב. נשתמש בנורמה ∞: (שורות):

$$\text{I}: \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 1.01 & -0.99 \\ -0.99 & 1.01 \end{pmatrix}$$

$$\left[A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{0.04} \cdot \begin{pmatrix} 1.01 & -0.99 \\ -0.99 & 1.01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25.25 & -24.75 \\ -24.75 & 25.25 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \|A\|_\infty = 2 \\ \|A^{-1}\|_\infty = 50 \end{array}\right\} \operatorname{cond}(A) = 100$$

$$\text{I}: \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} 0.03 & -0.01 \\ -0.01 & 0.03 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1250} \cdot \begin{pmatrix} 0.03 & -0.01 \\ -0.01 & 0.03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37.5 & -12.5 \\ -12.5 & 37.5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \|A\|_\infty = 0.04 \\ \|A^{-1}\|_\infty = 50 \end{array}\right\} \operatorname{cond}(A) = 0.04 \cdot 50 = 2$$

אכן מסעיף א' פתרון המערכת המשונה יוצא בשגיאה של 1% ב- x_1 ופתרון מערכת ב' ללא שגיאה.

פירוק LU:

$$\underbrace{A}_{=LU}\, x = b_{1,2,3,4,\dots,100}$$

$$(\Delta^{0})\cdot({}_{0}\nabla)\cdot(x) = (b)$$

הרעיון: לפרק את A לשתי מטריצות L,U כך ש:

$A=LU$, U - מטריצה משולשת עליונה

L - מטריצה משולשת תחתונה.

היתרון המרכזי: במצב זה, אם נתונים לנו מס' מערכות שבהן A זהה ווקטור הפתרונות b שונה, נוכל למצוא פעם אחת את הפירוק LU למטריצה A, בעזרתו למצוא את כל פתרונות המערכת עבור ה-b השונים.

פתרון המערכת:

נסמן $U\cdot x = y$ ואז נקבל $Ly=b$, L מטריצה משולשת תחתונה לכן נוכל למצוא את y. לאחר מכן נסמן:

$U\cdot x=y$, y מטריצה משולשת עליונה ולכן נוכל למצוא את הווקטור המבוקש X.

בס"ד

האלגוריתם:

נפרק (בלי pivoting) את המטריצה A. המטריצה המתקבלת נסמן ב-U. את המטריצה L נבנה ממכפלי השורה בצורה הבאה:

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

כך ש- m_{ij} זה המקדם שאיתו איפסנו את A_{ij}.

דוגמא:

נתונה המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

א. פרקו את A פירוק LU

ב. מצאו את A^{-1} בעזרת פירוק זה.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \boxed{3} & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & \boxed{-9} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{9}{4} R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 6.5 \end{pmatrix} = U$$

ג'

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&9/4&1\end{pmatrix}$$

ניתן לבדוק $L\cdot U=A$

ב:

$$\begin{pmatrix}A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots&\vdots&\vdots\\X_1&X_2&X_3\\\vdots&\vdots&\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{}_{b_1}\ \underbrace{}_{b_2}\ \underbrace{}_{b_3}$$

נחפש פתרון X_1 כך ש- $A\cdot X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$LU\cdot X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

נסמן $y=U\cdot X_1$

$$L\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&9/4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$y_1=1;\ y_2=-3;\ y_3=4.75$

$$U\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\4.75\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\quad X_1''\\ \begin{pmatrix}1&3&2\\0&-4&-2\\0&0&6.5\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\4.75\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_3 = 0.7308;\ a_2 = 0.3846$$
$$a_1 = -1.6154$$

באותו אופן נסמן $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
נבצע אותו חישוב ונקבל

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0.9231 \\ -0.0769 \\ -0.3462 \end{pmatrix}$$

באופן דומה נחשב את העמודה ה-3 ונקבל:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.6154 & | & | \\ 0.03846 & x_2 & x_3 \\ 0.7308 & | & | \end{pmatrix}$$

פירוק PLU:

בדומה מאוד לפירוק LU רק שאנחנו משתמשים ב- pivoting חלקי (החלפת שורות בלבד). במצב כזה נשמור לאורך כל הפרק 3 מטריצות

$$P,\ L,\ U$$

בהתחלה נסמן: $P = I$

$$U = A \qquad L = zeros(n)$$

נבצע פירוק גאוס עם pivoting חלקי למטריצה U רק שבכל שלב:

- החלפת שורות ב-U תגרור החלפת שורות ב- L, P.
- איפוס איבר ב-U יגרור שמירת מינוס המקדם שאיתו איפסנו את השורה נכניס למקום המתאים ב-L.

(החלפנו את שתי השורות הרלוונטיות בכל המטריצות)

$$l_4 - \frac{1}{4} l_3 \to l_4 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת M ולכן נגדיר את המטריצות P,L,U בצורה הבאה:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; , \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \; , \; U = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

ניתן לבדוק שמתקיים LU=PM. כעת נחזור למשוואה המקורית:

נסמן $Ux = y$ ונקבל:

$$Ly = Pb$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.5 \\ 15 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 17 \\ 6.5 \end{pmatrix}$$

ע"י חילוץ לאחור נקבל: $y = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}$, ולכן מתקיים: $Ux = y$:

שוב ע"י חילוץ לאחור נקבל:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

דוגמא לפירוק **PLU**: בצע פירוק PLU למטריצה לבאה: $M = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 3.25 & 10.25 \\ 12 & 2 & 1 & 0 \\ 2.4 & 10.4 & -1.8 & 2 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{pmatrix}$, ומצא באמצעותו פתרון למערכת $Mx = b$ כאשר $b = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 15 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$.

פתרון: תחילה נגדיר שלוש מטריצות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & -1 & 3.25 & 10.25 \\ 12 & 2 & 1 & 0 \\ 2.4 & 10.4 & -1.8 & 2 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{pmatrix}$$

נבצע דירוג למטריצה M עם pivoting חלקי ונעדכן את שתי המטריצות הימניות בהתאמה:

$$l_1 \leftrightarrow l_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 3.25 & 10.25 \\ 2.4 & 10.4 & -1.8 & 2 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{pmatrix}$$

(החלפנו את שתי השורות בכל המטריצות)

$$\begin{matrix} l_2 + \frac{1}{2} l_1 \to l_2 \\ l_3 - \frac{1}{5} l_1 \to l_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{pmatrix}$$

(עידכנו את המטריצה הימנית M, ובנוסף שמנו את האיבר שאיתו הכפלנו את השורה הראשונה כדי לאפס של איבר עמודה, במקום המתאים)

כעת נבחר שוב pivot מתאים כדי לאפס את העמודה השניה:

$$l_3 \leftrightarrow l_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{pmatrix}$$

(החלפנו את שתי השורות הרלוונטיות בכל מטריצה)

$$l_4 - \frac{1}{10} l_2 \to l_4 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \\ 0 & 0 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

(עדכנו את המטריצה הימנית M, ושמנו את 0.1 במקום המתאים במטריצה האמצעית L)

$$l_3 \leftrightarrow l_4 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \end{pmatrix}$$

המשך לאחר פירוק המטריצה נקבל את 3 המטריצות P, L, U.
ל-L נוסף את המטריצה I ומתקיים:

$$P \cdot A = L \cdot U$$
$$\to Ax = b$$
$$PAx = PB$$

ונמשיך כמו ב-LU.

פירוק cholsky:

הגדרה: תהי A מטריצה. A מטריצה סימטרית אם $A = A^T$.
A מטריצה חיובית אם ורק אם מתקיים אחד מהתנאים השקולים הבאים:

1. $x^t A x > 0 \quad ; \forall x$
2. כל הע"ע של A גדולים מ-0.
3. כל המינורים הראשיים של A גדולים מ-0.