

תרגול כיתה 9 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה
התפלגות נורמלית, קירובים, משפט הגבול המרכזי
 מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

התפלגות נורמלית

המעבר מהתפלגות נורמלית כלשהי להתפלגות נורמלית סטנדרטית (תקנון)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

כללים לשימוש בטבלת ההתפלגות הנורמלית סטנדרטית z
(a ≥ 0)

$$P(Z \leq a) \equiv \phi(a); \quad P(Z \geq a) = 1 - \phi(a); \quad P(Z \leq -a) = 1 - \phi(a)$$

$$P(|Z| \leq a) = 2\phi(a) - 1; \quad P(a \leq Z \leq b) = \phi(b) - \phi(a)$$

שאלה 1

בכיתה מסויימת ממוצע הקפיצה לגובה הוא $\bar{X} = 95$ (ס"מ) עם סטיית תקן $S_x = 5$ (ס"מ).
 ממוצע הזמן של ריצת 60 מטר הוא $\bar{Y} = 10.5$ (שניות) עם סטיית תקן $S_y = 0.3$ (שניות).
 האם תלמיד הקופץ 100 ס"מ לגובה ורץ 60 מטר ב-10.8 שניות, מצטיין בשני ענפי הספורט
 באותה מידה?

שאלה 2

המכירות של שפופרות משחת שיניים מסויימת מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10,000
 וסטיית תקן של 1,500 יחידות בשבוע.
 א. מהי ההסתברות שיותר מ-12,000 שפופרות תמכרנה בשבוע?
 ב. כמה שפופרות לפחות צריך לייצר כדי להיות בטוחים ב-95% שלא ייגמר המלאי?

שאלה 3

נתון שקבוצת תצפיות מתפלגת נורמלית עם ממוצע m וסטיית תקן s.
 א. מהו אחוז התצפיות שמתחת לערך $(m - 0.675s)$?
 ב. מצא קבוע a כך שאחוז התצפיות בתוך הטווח $(m \pm as)$ הוא 75%
 מהקבוצה.

משפט הגבול המרכזי

יהיו $(i=1,2,\dots,n)$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות. אזי:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$(2) \quad \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

הקירוב הנורמלי להתפלגות בינומית

אם $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ומתקיים $n \geq 30$, אזי $X \sim N\left(np, (\sqrt{npq})^2\right)$

שאלה 4

מטילים קובייה הוגנת [1..6] אלף פעמים.

- חשב בקירוב את הסיכוי שיוטל "6" בין 150 ל-200 פעמים.
- אם ידוע שהתוצאה "6" התקבלה בדיוק 200 פעמים, חשב בקירוב את הסיכוי ש-"5" הוטל פחות מ-150 פעמים.

שאלה 5

- משקלו של עלון פרסום הוא משתנה מקרי X המתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 גרם. מותר לשלוח בדואר חבילת עלונים במשקל מקסימלי של 3 ק"ג. העלונים ב"ת האחד במשנהו.
- מהי בקירוב ההסתברות ש-36 עלוני פרסום שנבחרו באקראי ייכנסו בחבילה אחת?
 - מהי בקירוב ההסתברות שממוצע המשקל של 25 עלוני פרסום שנבחרו באקראי יעלה על 110 גרם?
 - מהי ההסתברות המדוייקת שלפחות 9 מתוך 36 עלוני פרסום שנבחרו באקראי ישקלו למעלה מ-110 גרם? חשב בקירוב הסתברות זו.
 - מהי בקירוב ההסתברות שבדיוק 12 מתוך 36 עלוני פרסום שנבחרו באקראי ישקלו למעלה מ-110 גרם?

שאלה 6

- אסטרונום מעוניין למדוד את מרחקו של כוכב מסויים. כל מדידה היא משתנה מקרי שתוחלתו d שנות-אור ושונותה היא ארבע שנות-אור. כמה מדידות עליו לבצע כדי להגיע לכך שלממוצע המדידות יהיה סיכוי של 95% להיות בסביבת ± 0.5 שנות אור מהמרחק האמיתי?