

תרגיל בית 4 – טופולוגיה

שאלה 1

- א. הוכיחו את הטענה הבאה: A סגורה $\Leftrightarrow A' \subseteq A$.
- ב. מצאו את נקודות ההצטברות של תת הקבוצות הבאות של המרחב המטרי \mathbb{R} :
1. \mathbb{Q} ,
 2. $(0,1)$.

שאלה 2

יהי X מ"מ ותהי $S \subseteq X$ תת קבוצה ו- $x \in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

- א. $x \in S - S'$ (הפרש קבוצות).
- ב. קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(x, \varepsilon) \cap S = \{x\}$.
- ג. לכל סדרה $\{x_n\} \subseteq S$, אם $x_n \rightarrow x$ אזי $\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

שאלה 3

- א. יהי X מ"מ שלם ותהי A תת קבוצה סגורה של X . הוכיחו ש- A תת מרחב מטרי שלם.
- ב. יהי X מ"מ ו- $A \subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם של X . הראו ש- A תת קבוצה סגורה של X .
- ג. הוכיחו או הפריכו: אם X מ"מ שלם, ו- $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה, אזי $f(X)$ תת מרחב שלם של \mathbb{R} .

שאלה 4

- נסמן ב- A' את אוסף נקודות ההצטברות של A ; נסמן ב- A'' את אוסף נקודות ההצטברות של A' וכן הלאה.
- יהי (X, d) מ"מ, תהי $\{x_n\}$ סדרה שכל איבריה שונים המתכנסת ל- $x \in X \setminus A$ כאשר $A = \{x_n\}$.
- א. מצאו את A', A'' .
 - ב. האם A קומפקטי?

ג. האם $A \cup \{x\}$ קומפקטי? נמקו את תשובתכם אך ורק באמצעות הגדרת הקומפקטיות דרך **כיסוים פתוחים!**

שאלה 5

יהי X מ"מ ויהי Y אוסף אינסופי בן מניה של נקודות מתוך X , כך שלכל שתי נקודות שונות $a, b \in Y$ מתקיים $1 \leq d(a, b) \leq 2$. הוכיחו:

- א. Y סגור וחסום ב- X .
ב. האם Y תת מרחב קומפקטי (ביחס למטריקת תת המרחב)?

שאלה 6

בתרגיל זה תוכיחו כי כל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.

יהי (X, d) מ"מ. נגדיר שתי מטריקות על X : \tilde{d}, ρ .

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad \rho(x, y) = \min\{d(x, y), 1\} \quad \text{לכל } x, y \in X.$$

- א. הוכיחו כי אלה אכן מטריקות.
(במידה ועשיתם זאת באינפי 3 – אין צורך שתעשו שוב. אם לא עשיתם – זה תרגיל טוב.)
ב. הוכיחו כי המטריקות הן חסומות.
הערה: מטריקה ρ נקראת "חסומה" אם קיים $r > 0$ כך שלכל x, y מתקיים $\rho(x, y) \leq r$ (שקול להגדרות שניתנו בתרגול האחרון).
ג. הוכיחו כי \tilde{d}, d ו- ρ שקולות.

שאלה 7

יהי (X, d) מ"מ קומפקטי. תהי $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ סדרה בעלת גבול חלקי יחיד לכל היותר. הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

הדרכה: ראשית הראו שלסדרה אכן קיים גבול חלקי $a \in X$. כעת הניחו

בשלילה שהסדרה לא מתכנסת ל- a ובנו תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ כך ש-

$$d(x_{n_k}, a) \geq \varepsilon.$$

בהצלחה!