מופשטת 1 - תרגיל בית 12

<u>שאלה 1</u>

הראו ש- D_4 פתירה.

<u>פתרון</u>

הסדרה $D_4 \triangleleft <\sigma> \triangleleft <\sigma^2> \triangleleft \{id\}$ היא סדרת הרכב שבה כל הגורמים הם פשוטים (איזומורפיים ל- $\mathbb{Z}_2$), ולכן החבורה פתירה. שימו לב שזאת לא סדרת ההרכב היחידה. לדוגמה: $D_4 \triangleleft <\sigma^2,\tau> \triangleleft <\tau> \triangleleft \{id\}$.

מש"ל

<u>שאלה 2</u>

א. תהא G חבורה מסדר 34. הוכיחו שהיא פתירה.

<u>פתרון</u>

$34 = 2 \cdot 17$ ולכן $G \cong \mathbb{Z}_{34}$ או $G \cong D_{17}$ ובכל אחד מהמקרים הללו G פתירה.

ב. הראו שחבורת הקווטרניונים Q_8 פתירה.

<u>פתרון</u>

זוהי חבורת p שכן סדר החבורה הוא 2^3 ולכן היא פתירה.

ג. הוכיחו שכל חבורה מסדר 88 היא פתירה.

<u>פתרון</u>

$88 = 2^3 \cdot 11$. $n_{11} \mid 8 \wedge n_{11} \equiv 1 \pmod{11}$ ולכן $n_{11} = 1$. מכאן קיימת תח"נ 11-סילו ל- G; נסמנה H. תת החבורה H היא ציקלית מסדר ראשוני ולכן אבלית ופתירה. G/H חבורת p, שכן סדרה הוא 2^3 ולכן היא פתירה. מכיון ש H ו- G/H פתירות נקבל עפ"י משפט ש- G פתירה.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

הוכיחו שכל חבורה G מסדר 1089 היא פתירה.

<u>פתרון</u>

$1089 = 3^2 \cdot 11^2$. מתקיים: $n_{11} \equiv 1(\bmod 11)\ \wedge\ n_{11} | 3^2$ ולכן $n_{11} = 1$, ולכן תת החבורה 11-סילו Q היא נורמלית ומתקיים $|Q| = 11^2$ ולכן היא אבלית. לפיכך, בסדרה הנורמלית $G \triangleright Q \triangleright \{e\}$ כל הגורמים הם אבליים ולכן החבורה G היא פתירה.

מש"ל

שאלה 4

מעל קבוצה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ נגדיר פעולה $(a_1,b_1)\bullet(a_2,b_2)=(a_1+b_1a_2,b_1b_2)$. הוכיחו:

א. $G=(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\bullet)$ חבורה והיא לא אבלית.

ב. חשבו את G',G'' והראו ש- G פתירה.

פתרון

א. סגירות: (ברור).

אסוציאטיביות:

$$((a,b)(x,y))(A,B)=(a+bx,by)(A,B)=(a+bx+byA,byB)=$$
$$(a,b)((x,y)(A,B))=(a,b)(x+yA,yB)=(a+b(x+yA),byB)$$

איבר נייטרלי:

$$(a,b)(x,y)=(a,b)=(a+bx,by)\Rightarrow y=1,x=0\Rightarrow e=(0,1)$$

הופכי:

$$(a,b)(x,y)=(0,1)=(a+bx,by)\Rightarrow y=\frac{1}{b},x=-a/b\Rightarrow(a,b)^{-1}=(-a/b,1/b)$$

החבורה לא אבלית: $(1,2)(3,5)=(7,10)\neq(8,10)=(3,5)(1,2)$

ב. מחישוב של $uvu^{-1}v^{-1}$ עבור כל u,v מהחבורה נקבל שכל איבר בנגזרת הראשונה הוא מהצורה $(x,1)$; ומחישוב של כל $uvu^{-1}v^{-1}$ עבור כל איבר מהנגזרת הראשונה נקבל $(x,1)(a,1)(-x,1)(-a,1)=(0,1)=e$ ולכן החבורה פתירה.

מש"ל

שאלה 5

א. מצאו את $(A_4)'$;

ב. מצאו את $(S_4)'$.

פתרון

א. נסמן ב- V את חבורת קליין. מתקיים $A_4/V \cong \mathbb{Z}_3$ ולכן $(A_4)' \le V$. מכיוון ש- $(A_4)' \lhd A_4$ יש לנו רק שתי אפשרויות: $(A_4)' = \{id\}$ או $(A_4)' = V$.
האפשרות הראשונה נפסלת (מדוע?) ולכן $(A_4)' = V$.

ב. כאן יש שתי אפשרויות לפתרון.

<u>דרך א</u>

מכיוון ש- $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$ מתקיים $(S_4)' \le A_4$. מכיוון ש- $(S_4)' \lhd S_4$ יש לנו 3 אפשרויות: $(S_4)' = A_4 \vee (S_4)' = V \vee (S_4)' = \{id\}$. האפשרות הראשונה (משמאל) נפסלת מיד (מדוע?). נתבונן באפשרות השניה. ניזכר שבתרגול 8 הוכחנו (למעשה) כי $S_4/V \cong S_3$. מכיוון ש- S_3 אינה אבלית לא יתכן כי $(S_4)' \le V$ ולכן $(S_4)' = A_4$.

<u>דרך ב</u>

ההתחלה היא כמו בדרך א': מבינים ש- $(S_4)' \le A_4$ ויש לפסול את האפשרות ש- $(S_4)' = V$. כעת נמצא איזשהו איבר בקומוטטור, למשל: $[(123),(12)] = (123)(12)(132)(12) = (132)$ ולכן $(132) \in (S_4)'$. מכיוון ש- $(S_4)' \lhd S_4$ היא חייבת להכיל את כל המחזורים באורך 3, ולכן $(S_4)' = A_4$.

מש"ל

<u>שאלה 6</u>

מצאו את מספר תת-חבורות $2-$סילו של S_5. לאיזו חבורה מוכרת הן איזומורפיות?

<u>פתרון</u>

מתקיים $|S_5| = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ ולכן תת חבורת $2-$סילו היא מסדר 8. מכיוון ש- $S_4 \le S_5$ וכן $|S_4| = 2^3 \cdot 3$ מספיק למצוא תת חבורת $2-$סילו של S_4. אנחנו כבר מכירים תת חבורה מסדר 8 כזאת, והיא החבורה הדיהדרלית מסדר 8. נסמן $P = \langle (1234),(13) \rangle$ (בדקו שאכן $P \cong D_4$!). כלומר, תת חבורות $2-$סילו של S_5 כולן איזומורפיות ל- D_4. על מנת למצוא את מספרן, עלינו למצוא את המנרמל $N_{S_5}(P)$ (מכאן ואילך נשמיט את האינדקס, תוך הסכמה שכל המנרמלים הם ביחס ל- S_5). נתבונן בתת חבורה של P: $A = \langle (1234) \rangle$. ב- P יש רק שני איברים מסדר 4 ושניהם נמצאים ב- A, לכן כל אוטומורפיזם של P משאיר את A במקום. מכאן, כל איבר שמנרמל את P חייב לנרמל גם את A ולכן $N(P) \subseteq N(A)$. נמצא את הסדר של $N(A)$. לשם כך נשים לב שהסדר של

המרכז $C(A)$ הוא 4. הסבר: $C((1234)) \subseteq C(A) \subseteq \langle(1234)\rangle$ וכן
$30 = |conj(1234)| = [S_5 : C((1234))]$ ולכן $|C((1234))| = 4$.

כעת נפעיל את משפט N/C ונקבל שיכון $N(A)/A \to \mathbb{Z}_2$. לכן $|N(A)| \leq 4 \cdot 2 = 8$
ולכן, מכיוון ש-$P \leq N(P) \leq N(A)$ נקבל $|N(P)| = 8$ ולכן יש 15 תת חבורות 2–
סילו ב-S_5.

מש"ל